Übungen zur Einführung in die Geophysik II (SS 2017)

Vorlesung: Dr. Ellen Gottschämmer (ellen.gottschaemmer@kit.edu)
Übung: Martin Pontius (martin.pontius@kit.edu)
Übungstermin und -ort: Do, 13.07.2017, 08:00-09:30, Gebäude 30.22 Hörsaal B

Lösungen zu Übungsblatt 7: Temperatur

Aufgabe 1: Mechanismen der Wärmeausbreitung

a) Konvektion, Konduktion (Wärmeleitung), Strahlung

b) Konvektion im Erdmantel, Konduktion in der Erdkruste, Strahlung spielt innerhalb der Erde keine Rolle.

Aufgabe 2: Wärmeleitfähigkeit

a) Beispielwerte für die Wärmeleitfähigkeit von verschiedenen Stoffen

Material	Wärmeleitfähigkeit k in $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}}$
Silber	420
Kupfer	380
Stahl	40-60
Beton	1,3
Ziegel	0,5-0,8
Wasser	0,58
Holz	0,13-0,2
Luft	0,025

b) Luft ist ein guter Wärmeisolator, was man an dem geringen Wert der Wärmeleitfähigkeit erkennt.

c) Kochtöpfe haben oft einen Kupferboden, weil Kupfer hingegen ein sehr guter Wärmeleiter ist und die Wärme somit schnell an das Innere des Topfes abgibt.

Aufgabe 3: Oberflächentemperatur der Erde

a) Geht man überall von senkrechtem Einfall der Strahlen aus, so kann man die bestrahlte Fläche der Erde durch einen Kreis mit Radius $r_\mathrm{e} = 6370\,\mathrm{km}$ nähern. Der Flächeninhalt dieses Kreises beträgt $A = \pi r_\mathrm{e}^2$. Dann gilt für die gesamte Strahlungsleistung:

$$P_\mathrm{ges} = S_0 \cdot \pi \cdot r_\mathrm{e}^2 = 1367 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot \pi \cdot (6370 \cdot 10^3\,\mathrm{m})^2 = 1,7426 \cdot 10^{17}\,\mathrm{W}$$

b) Mit der gegebenen Formel und den Werten von S_0 , α und σ berechnet man die Temperatur T zu

$$T = \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1-\alpha)} = \sqrt[4]{\frac{1367 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{4 \cdot 5,6703 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^2}} \cdot 0,7} \approx 254,86\,\mathrm{K}$$

c) Steigt die Solarkonstante um 0,1 %, so beträgt ihr Wert

$$S_{0,+} = 1367\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} + 1,367\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 1368,367\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

Einsetzen in die Formel von oben ergibt eine Temperatur von

$$T = \sqrt[4]{\frac{S_{0,+}}{4\sigma}(1-\alpha)} = \sqrt[4]{\frac{1368,367\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{4 \cdot 5,6703 \cdot 10^{-8}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^2}} \cdot 0,7} \approx 254,92\,\mathrm{K}.$$

Sinkt die Solarkonstante um 0,1 %, so beträgt ihr Wert

$$S_{0,-} = 1367\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} - 1,367\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 1365,633\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

Einsetzen in die Formel von oben ergibt eine Temperatur von

$$T = \sqrt[4]{\frac{S_{0,-}}{4\sigma}(1-\alpha)} = \sqrt[4]{\frac{1368,367\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{4 \cdot 5,6703 \cdot 10^{-8}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^2}} \cdot 0,7} \approx 254,8\,\mathrm{K}.$$

Bei einer Änderung der Solarkonstanten um 0,1 % ändert sich die Temperatur an der Erdoberfläche um $\Delta T = 0,06\,\mathrm{K}$ oder 0,02 %.
MERKE: Die Solarkonstante schwankt nur minimal (deshalb bezeichnet man sie auch als Konstante). Auch die damit verbundene Temperaturschwankung liegt nur im Bereich von einigen Hundertstel Kelvin.

Aufgabe 4: Eindringtiefe von Temperaturvariationen an der Erdoberfläche

a) Die Periode der Störung beträgt $T = 1\,\mathrm{a} = 365,25 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 3,16 \cdot 10^7\,\mathrm{s}$. Für die Kreisfrequenz ω gilt: $\omega = 2\pi/T$. Mit der gegebenen Formel für die Eindringtiefe einer Störung

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\omega}}$$

und dem Wert für die Temperaturleitfähigkeit κ ergibt sich für die Eindringtiefe

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\omega}} = \sqrt{\frac{\kappa \cdot T}{\pi}} = \sqrt{\frac{10^{-6}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s} \cdot 3,16 \cdot 10^7\,\mathrm{s}}{\pi}} \approx 3,17\,\mathrm{m}.$$

Setzt man die gegebene Formel für die Phasenverschiebung gleich 180° und setzt die Eindringtiefe ein, so ergibt sich

$$\phi = y \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot \kappa}} = y/d = \pi$$

und für die Tiefe y, in der die Temperaturen 180° außer Phase sind,

$$y = d \cdot \pi \approx 9,96\,\mathrm{m}.$$

In dieser Tiefe beträgt die Amplitude offensichtlich sehr viel weniger als $1/e$.

b) Die Periode der Störung beträgt $T = 1\,\mathrm{d} = 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 86400\,\mathrm{s}$. Analog zu Aufgabenteil a) ergibt sich für die Eindringtiefe

$$d = \sqrt{\frac{\kappa \cdot T}{\pi}} = \sqrt{\frac{10^{-6}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s} \cdot 86400\,\mathrm{s}}{\pi}} \approx 16,6\,\mathrm{cm}.$$

Die Tiefe y, bei der eine Phasenverschiebung von 180° zu beobachten ist, beträgt

$$y = d \cdot \pi \approx 52,1\,\mathrm{cm}.$$

Aufgabe 5: Wärmefluss in der Erdkruste

a) Die Wärmestromdichte q in den oberflächennahen Graniten beträgt

$$q = \rho \cdot H_0 \cdot h = 2700\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}6 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{W/kg} \cdot 35 \cdot 10^3\,\mathrm{m} = 90{,}72\,\mathrm{mW/m^2}$$

b) Der durchschnittliche Wert der kontinentalen Wärmestromdichte liegt bei $q = 55\,\mathrm{mW/m^2}$. Der Wert aus oberflächennahem Granit ist mit $91\,\mathrm{mW/m^2}$ deutlich höher: Die Wärmeproduktion aus radioaktiven Elementen nimmt offensichtlich nach unten ab.

Aufgabe 6: Tritt Konvektion auf?

a) Mit der gegebenen Formel und den gegebenen Werten berechnet man

$$Ra = \frac{1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}21 \cdot 10^{-3}/\mathrm{K} \cdot 5\,\mathrm{K} \cdot (0{,}1\,\mathrm{m})^3}{1\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} = 10500$$

Die kritische Rayleighzahl Ra_c liegt im Fall von Wasser, begrenztem Boden und freier Oberfläche bei 1708. Es findet also Konvektion statt, sie würde auch bereits bei 1 K Temperaturdifferenz auftreten.

b) Mit der gegebenen Formel und den gegebenen Werten berechnet man

$$Ra = \frac{910\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3}/\mathrm{K} \cdot 5\,\mathrm{K} \cdot (0{,}1\,\mathrm{m})^3}{100\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} = 455$$

Die kritische Rayleighzahl Ra_c liegt bei einer freien Oberfläche und einem begrenzten Boden im Fall von Öl bei 1107. Bei einer Temperaturdifferenz von 5 K findet also noch keine Konvektion statt. Die kritische Rayleighzahl wird überschritten bei einer Temperaturdifferenz von

$$\Delta T = \frac{Ra_\mathrm{c} \cdot \mu \cdot \kappa}{\rho \cdot g \cdot \alpha \cdot h^3} = 12{,}16\,\mathrm{K}$$

c) Als obere Abschätzung für die Rayleighzahl berechnet man mit den gegebenen Werten

$$Ra_\mathrm{max} = \frac{5500,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}4/\mathrm{K} \cdot 4000\,\mathrm{K} \cdot (2900 \cdot 10^3\,\mathrm{m})^3}{10^{21}\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} \approx 1{,}29 \cdot 10^{13}$$

Die untere Abschätzung beträgt

$$Ra_\mathrm{min} = \frac{3300\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}/\mathrm{K} \cdot 2500\,\mathrm{K} \cdot (2900 \cdot 10^3\,\mathrm{m})^3}{10^{23}\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} \cdot 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} \approx 8{,}05 \cdot 10^4$$

Die Werte liegen beide oberhalb der kritischen Rayleighzahl von 1107. Es lässt sich auf diese Weise zeigen, dass im Mantel auch bei einer konservativen Abschätzung die Voraussetzungen für Konvektion gegeben sind.