

Lösung zur 1. Übung zur Einführung in die Geophysik I

Thema der Übung: Grundlagen der Seismik, Elastische Moduln

Th. Bohlen, E. Gottschämmer

Elastische Moduln

1. Für die seismischen Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeiten v_p und v_s gelten folgende Zusammenhänge:

$$v_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \qquad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Hier sind K das Kompressionsmodul, μ das Schermodul und ρ die Dichte des Gesteins. Einsetzen der gegebenen Werte in die Formeln ergibt für die obere Schicht ein Schermodul von $\mu_1 = 8,75 \cdot 10^7 \text{ kg s}^{-2} \text{ m}^{-1} = 8,75 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ und ein Kompressionsmodul von $K_1 = 3,87 \cdot 10^8 \text{ Pa}$. Für die untere Schicht ergibt sich $\mu_2 = 1,11 \cdot 10^8 \text{ kg s}^{-2} \text{ m}^{-1} = 1,11 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ und $K_2 = 6,63 \cdot 10^9 \text{ Pa}$.

2. Die größte Änderung zwischen Schicht 1 und Schicht 2 findet man in der Kompressionswellengeschwindigkeit. Sie steigt stark an, da unterhalb des Grundwasserspiegels die Poren wassergefüllt sind und somit die Gesteine schlechter komprimierbar sind. Aus diesem Grund steigt das Kompressionsmodul stark (etwa Faktor 20) an. Das Schermodul verzeichnet nur einen leichten Anstieg, da die Dichte zwar steigt, die Scherwellengeschwindigkeit aufgrund des Wassergehalts aber sogar abnimmt.
3. In der Vorlesung wurde die Zeitmittelgleichung für ein Modell bestehend aus der Matrix, einem Fluid und Ton vorgestellt. In diesem Fall setzt sich die Laufzeit T folgendermaßen zusammen:

$$T = T_{\text{Matrix}} + T_{\text{Fluid}} + T_{\text{Ton}}$$

$$\text{und damit } \frac{1}{v_{\text{eff}}} = \frac{\Phi}{v_{\text{Fluid}}} + \frac{(1-\Phi-V_T)}{v_{\text{Matr}}} + \frac{V_T}{v_{\text{Ton}}}$$

V_T ist dabei der Volumenanteil des Tons, v_{eff} die Ausbreitungsgeschwindigkeit und Φ die Porosität. Hier wird – im Gegensatz zu unserem Übungsblatt – der Begriff Matrix für die

harten Gesteinsanteile verwendet. In unserem Übungsblatt bezeichnen wir mit Matrix die Mischung von Sand, Kies und Wasser bzw. Luft. Zur Vereinfachung fassen wir hier Kies und Sand zusammen und bezeichnen diese – wie in der Aufgabenstellung auf dem Übungsblatt – als 'Gestein'.

Für unser Beispiel ergibt sich also für das obere Medium (luftgefüllte Poren und Gestein):

$$T = T_{\text{Gestein}} + T_{\text{Luft}}$$

und damit
$$\frac{1}{v_{P1}} = \frac{\phi}{v_{\text{Luft}}} + \frac{(1-\phi)}{v_{\text{Gestein}}}$$

und für das untere Medium (wassergesättigte Poren und Matrix):

$$T = T_{\text{Gestein}} + T_{\text{Fluid}}$$

und damit
$$\frac{1}{v_{P2}} = \frac{\phi}{v_{\text{Wasser}}} + \frac{(1-\phi)}{v_{\text{Gestein}}}.$$

Hier ist v_{P1} und v_{P2} die Geschwindigkeit der P-Wellen in der ersten bzw. zweiten Schicht, ϕ die Porosität des Mediums und v_{Luft} , v_{Wasser} und v_{Gestein} die Geschwindigkeiten von P-Wellen in Luft, Wasser und der Sand-Kies-Mischung. Subtrahiert man die zweite der beiden Gleichungen von der ersten, erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{1}{v_{P1}} - \frac{1}{v_{P2}} = \frac{\phi}{v_{\text{Luft}}} - \frac{\phi}{v_{\text{Wasser}}} + \frac{(1-\phi)}{v_{\text{Gestein}}} - \frac{(1-\phi)}{v_{\text{Gestein}}}$$

Wie man leicht sieht, fallen die hinteren beiden Terme auf der rechten Seite weg. Die Porosität ϕ kann man auf der rechten Seite ausklammern. Löst man die Gleichung dann nach der Porosität ϕ auf, so erhält man:

$$\phi = \frac{\frac{1}{v_{P1}} - \frac{1}{v_{P2}}}{\frac{1}{v_{\text{Luft}}} - \frac{1}{v_{\text{Wasser}}}}.$$

Einsetzen der gegebenen Geschwindigkeiten für die P-Wellen in der ersten und zweiten Schicht und Werten von $v_{\text{Luft}} = 330 \text{ m/s}$ und $v_{\text{Wasser}} = 1500 \text{ m/s}$ ergibt eine Porosität des Sandes von 47%.

4. Wenn nun 47% der Matrix mit Wasser bzw. Luft gefüllt sind, besteht der Rest der Matrix (53%) aus Gesteinskörnern. Es gilt:

$$\rho_1 = (1 - \phi) \rho_{\text{Gestein}} + \phi \rho_{\text{Luft/Wasser}}$$

Betrachten wir Schicht 1, da hier der einfachere Fall vorliegt: die Dichte der Luft ist sehr viel kleiner als die des Gesteins, somit vernachlässigen wir diesen Term. Dann ergibt sich die mittlere Dichte der Matrix (ρ_1 in Schicht 1) allein aus der Dichte des Gesteins

(ρ_{Gestein}), die 53% der Matrix ausmachen. Die dazugehörige Gleichung lautet

$$\rho_1 = (1 - \Phi) \rho_{\text{Gestein}} \quad \text{und daraus} \quad \rho_{\text{Gestein}} = 2642 \text{ kg/m}^3.$$

Grundlagen der Seismik

5. Das Snelliussche Brechungsgesetz lautet

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2}.$$

In dieser Aufgabe **fällt eine P-Welle von der Erdoberfläche** (Anregung durch Hammer oder Schuss) **ein**. Die Geschwindigkeit in der oberen Schicht v_1 entspricht also der P-Wellengeschwindigkeit in der oberen Schicht $v_P = 600 \text{ m/s}$. Der Winkel α ist durch den Abstrahlwinkel gegeben und beträgt $\alpha = 30^\circ/2 = 15^\circ$. Der Sinus dieses Winkels beträgt $\sin(15^\circ) = 0,2588$. An der Grenzfläche bilden sich nun P- und S-Wellen aus. Nun sollen die Winkel β_P und β_S berechnet werden, unter denen die P- und S-Wellen in die untere Schicht transmittiert werden. Man löst das Snelliussche Gesetz also nach β auf, setzt die gegebenen Werte und die Geschwindigkeiten der seismischen P- und S-Wellen in der zweiten Schicht ein und erhält für die Winkel β :

$$\beta_{P,S} = \arcsin(\sin(15^\circ) \frac{v_{P2,S2}}{v_{P1}})$$

Für den Winkel β_P der **transmittierten P-Welle** ergibt sich

$$\beta_P = \arcsin(\sin(15^\circ) * 1800/600) = \mathbf{50,9^\circ}.$$
 Der Strahl wird also vom Lot weg gebrochen.

Für den Winkel der **transmittierten S-Welle** ergibt sich analog $\beta_S = \mathbf{5,7^\circ}$, also ein kleinerer Winkel als der Einfallswinkel. Der Strahl wird zum Lot hingebrochen, da die Geschwindigkeit der S-Wellen im unteren Medium kleiner ist als die der P-Wellen im oberen Medium.

6. Verwende die gleiche Formel wie in Aufgabe 5, aber setze als Geschwindigkeit in der oberen Schicht die Geschwindigkeit der S-Welle in Schicht 1 ein, da eine **S-Welle einfällt**:

$$\beta_{P,S} = \arcsin(\sin(15^\circ) \frac{v_{P2,S2}}{v_{S1}})$$

Für den Winkel der **transmittierten P-Welle** ergibt sich **Totalreflexion**, da

$$\sin(15^\circ) \cdot 1800/250 = 1,86$$

ergibt und der **Arkussinus** einer Zahl > 1 **komplex** wird. Der Einfallswinkel für die P-Welle liegt also **oberhalb des kritischen Winkels** liegt, der in diesem Fall

$$\alpha = \arcsin(\sin \beta \cdot v_{S1}/v_{P2}) = 8,0^\circ \text{ beträgt (mit } \beta = 90^\circ).$$

Für den Winkel der **transmittierten S-Welle** ergibt sich $\beta = 13,8^\circ$.

7. Zuerst betrachten wir eine **einfallende P-Welle**: Für die **Reflexion der P-Welle** gilt, dass der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist. Mathematisch lässt sich das zeigen, wenn im Snelliuschen Gesetz die gleichen Geschwindigkeiten eingesetzt werden ($v_1=v_2=v_{P1}$).

Für die **Reflexion der S-Welle** setzt man in das Snelliussche Gesetz für $v_1 = v_{P1}$ und $v_2 = v_{S1}$ und erhält einen Reflexionswinkel der S-Welle von $\beta_S = 6,2^\circ$.

Betrachten wir nun die **einfallende S-Welle**: Die S-Welle wird mit der gleichen Argumentation wie oben unter einem Reflexionswinkel von 15° reflektiert.

Für den Winkel der **reflektierten P-Welle** gilt in diesem Fall:

$$\beta_P = \arcsin(\sin(15^\circ) \frac{v_{P1}}{v_{S1}})$$

Fällt die S-Welle unter 15° auf die Grenzschicht, wird die dabei erzeugt P-Welle unter einem Winkel von **$38,4^\circ$** reflektiert.

Hier noch einmal die Ergebnisse von Aufgabe 5 bis 7 in der Übersicht:

Einfallende Welle	Transmittierte Welle	Reflektierte Welle	Aufgabe
P: 15°	P: $50,9^\circ$		5
P: 15°	S: $5,7^\circ$		5
S: 15°	P: Totalreflexion		6
S: 15°	S: $13,8^\circ$		6
P: 15°		P: 15°	7
P: 15°		S: $6,2^\circ$	7
S: 15°		P: $38,4^\circ$	7
S: 15°		S: 15°	7

8. Für die kritischen Winkel gilt, dass die transmittierte Welle genau unter einem Winkel von 90° abgestrahlt wird. Wir benutzen also wieder das Snelliussche Gesetz:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2},$$

welches wir nach dem Winkel α auflösen. Totalreflexion tritt auf für den Fall, dass die Geschwindigkeit in der unteren Schicht größer ist, als die in der oberen Schicht. Dies ist für reflektierte P-Wellen sowohl bei einfallender P- als auch S-Welle der Fall. Die Winkel der Totalreflexion betragen dann für den Fall von einfallender und reflektierter P-Wellen $\alpha = 19,47^\circ$ und für den Fall von einer Konversion einer S- zu einer P-Welle $\alpha = 7,98^\circ$ (s.o.). Die S-Wellengeschwindigkeit der zweiten Schicht ist kleiner als P- und S-Wellengeschwindigkeit der oberen Schicht, deshalb tritt in diesen beiden Fällen keine Totalreflexion auf (das Argument des Arkussinus beträgt in diesem Fall wieder > 1). Im Fall, dass $v_{S2} > v_{S1}$, kommt es auch bei den Scherwellen zu Totalreflexion.

9. Wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit der P-Wellen mit der Tiefe zunimmt, wird der Strahl an jeder Schichtgrenze vom Lot weg gebrochen. Es entsteht eine sogenannte Tauchwelle.
10. Der schnellste Weg ist der senkrechte. Die obere Schicht hat eine Mächtigkeit von 10 Metern. Für diese Strecke benötigt die P-Welle eine Zeit von

$$t_1 = 10 \text{ m} / 600 \text{ m s}^{-1} = 1/60 \text{ s}.$$

Für die Strecke in der zweiten Schicht benötigt die P-Welle eine Zeit von

$$t_2 = 10 \text{ m} / 1800 \text{ m s}^{-1} = 1/180 \text{ s}.$$

Die Gesamtzeit ergibt sich aus der Summe der beiden Einzelzeiten:

$$t = t_1 + t_2 = 1/45 \text{ s} = 0,022 \text{ s}.$$

11. Bei einer Feldmessung wären neben den Kompressions- und Scherwellen auch noch die Oberflächenwellen erkennbar. Diese breiten sich nahe der Oberfläche aus und ihre Amplituden nehmen exponentiell mit der Tiefe ab. Sie sind langsamer als die Scherwellen und werden aufgrund ihrer Polarisierung in verschiedene Oberflächenwellentypen unterschieden (dazu mehr in der nächsten Vorlesung).