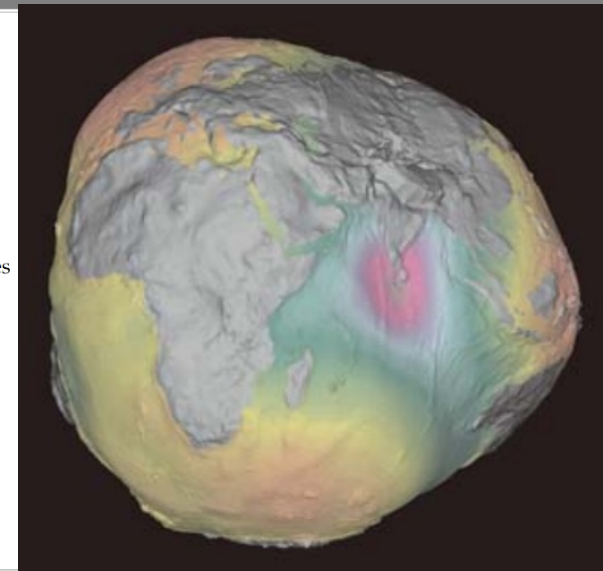
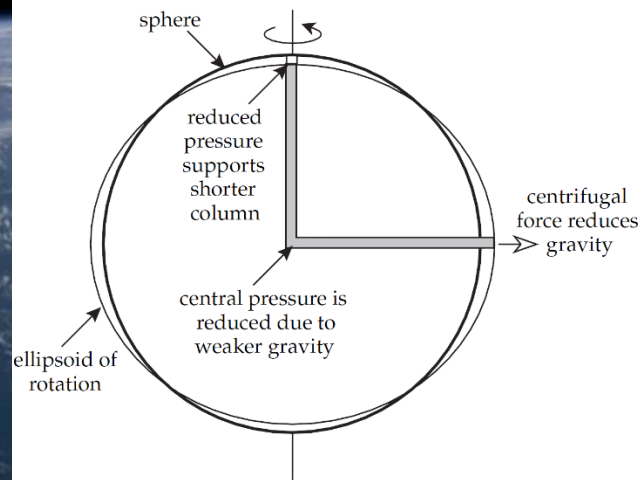


Einführung in die Geophysik II

Schwere und Gravimetrie

Geophysikalisches Institut, Fakultät für Physik



	Vorlesung: Mi., 11:30-13:00, HS B		Übungsblatt online	Übung: Mo., 11:30-13:00, HS B Besprechung der Übungsblätter	
	19.04	keine Vorlesung		17.04	
VL1	26.04	Aufbau der Erde & Plattentektonik		24.04	
VL2	03.05	Radiometrische Altersbestimmung	Ü1	01.05	
VL3	10.05	Seismische Wellen und ihre Wechselwirkungen, elastische Eigenschaften von Gesteinen		08.05	Ü1: Radiometrische Altersbestimmung
VL4	17.05	Erdbeben: Bruchprozesse, Messung & Lokalisierung von Erdbeben	Ü2	15.05	
VL5	24.05	Ausbreitung von Erdbebenwellen, Strukturerkundung		22.05	Ü2: Seismische Wellen, elast. Eigen.
	31.05	keine Vorlesung, Pfingstwoche		29.05	
VL6	07.06	Eigenschwingungen	Ü3	05.06	
VL7	14.06	Seismizität, Gefährdung, Magnituden		12.06	
VL8	21.06	Schwere und Gravimetrie	Ü4	19.06	Ü3: Eigenschwingungen, Seismizität
VL9	28.06	Magnetismus	Ü5	26.06	Ü4: Schwere und Gravimetrie
VL10	05.07	Temperatur	Ü6	03.07	
VL11	12.07	Aufbau und Dynamik des Erdinneren: Mantel		10.07	Ü5: Magnetismus
VL12	19.07	Aufbau und Dynamik des Erdinneren: Erdkern		17.07	Ü6: Temperatur

Vorlesung: Die Vorlesung findet mittwochs um 11:30 - 13:00h im Hörsaal B (Geb. 30.22) statt und beginnt am 26.4.2023.

Übungen: Die Übungen finden nach obigen Zeitplan montags um 11:30 - 13:00h im Hörsaal B (Geb. 30.22) statt. Die Termine finden sich in der oben stehenden Tabelle. Übungsblätter werden nach den jeweiligen Vorlesungen online gestellt. Durch Vorrechnen von Übungsaufgaben können Punkte (max. 3) erworben werden, die auf die Klausur als Bonuspunkte* angerechnet werden. Die Punktzahl, die für das Vorrechnen der einzelnen Aufgaben vergeben wird, wird in der jeweiligen Übung bekannt gegeben.

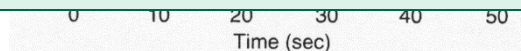
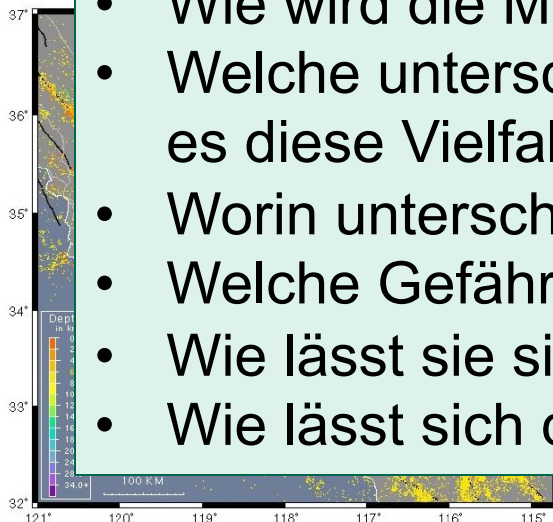
*d.h. das Bestehen der Prüfung durch diese Punkte ist nicht möglich; bei bestandener Klausur lässt sich dadurch jedoch die Note verbessern.

Klausur: Erster Termin am 26.07.2022, 14:00 - 15:30h, zweiter Termin am 20.09.2022, 09:00 - 10:30h. Die der Ort der Klausuren ist der Otto-Lehmann-Hörsaal.

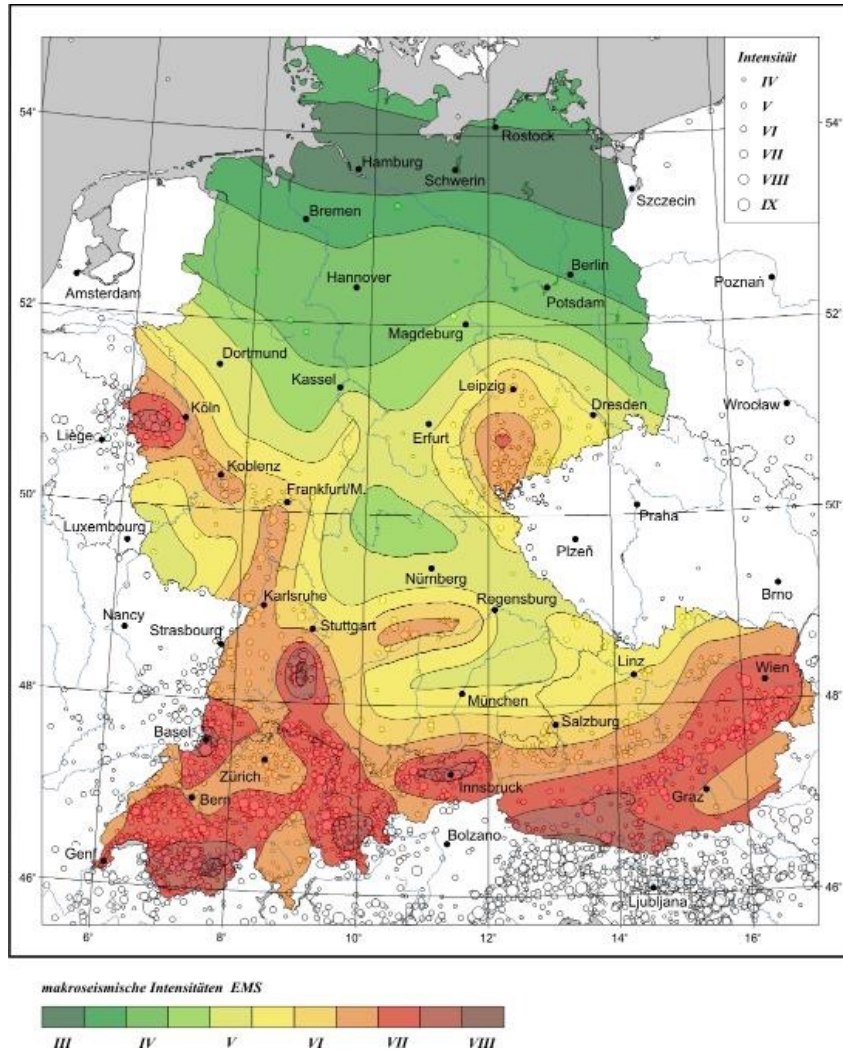
Einführung in die Geophysik II

Seismizität, seismische Gefährdung, Magnituden, Intensitäten

- Wie ist die weltweite und regionale Seismizität charakterisiert?
- Gibt es Möglichkeiten, die Verteilung von Erdbeben quantitativ zu erfassen?
- Wie wird die Magnitude bestimmt?
- Welche unterschiedlichen Magnituden gibt es und warum gibt es diese Vielfalt?
- Worin unterscheidet sich Magnitude und Intensität?
- Welche Gefährdung tritt durch Erdbeben auf?
- Wie lässt sie sich quantifizieren?
- Wie lässt sich das Risiko minimieren?

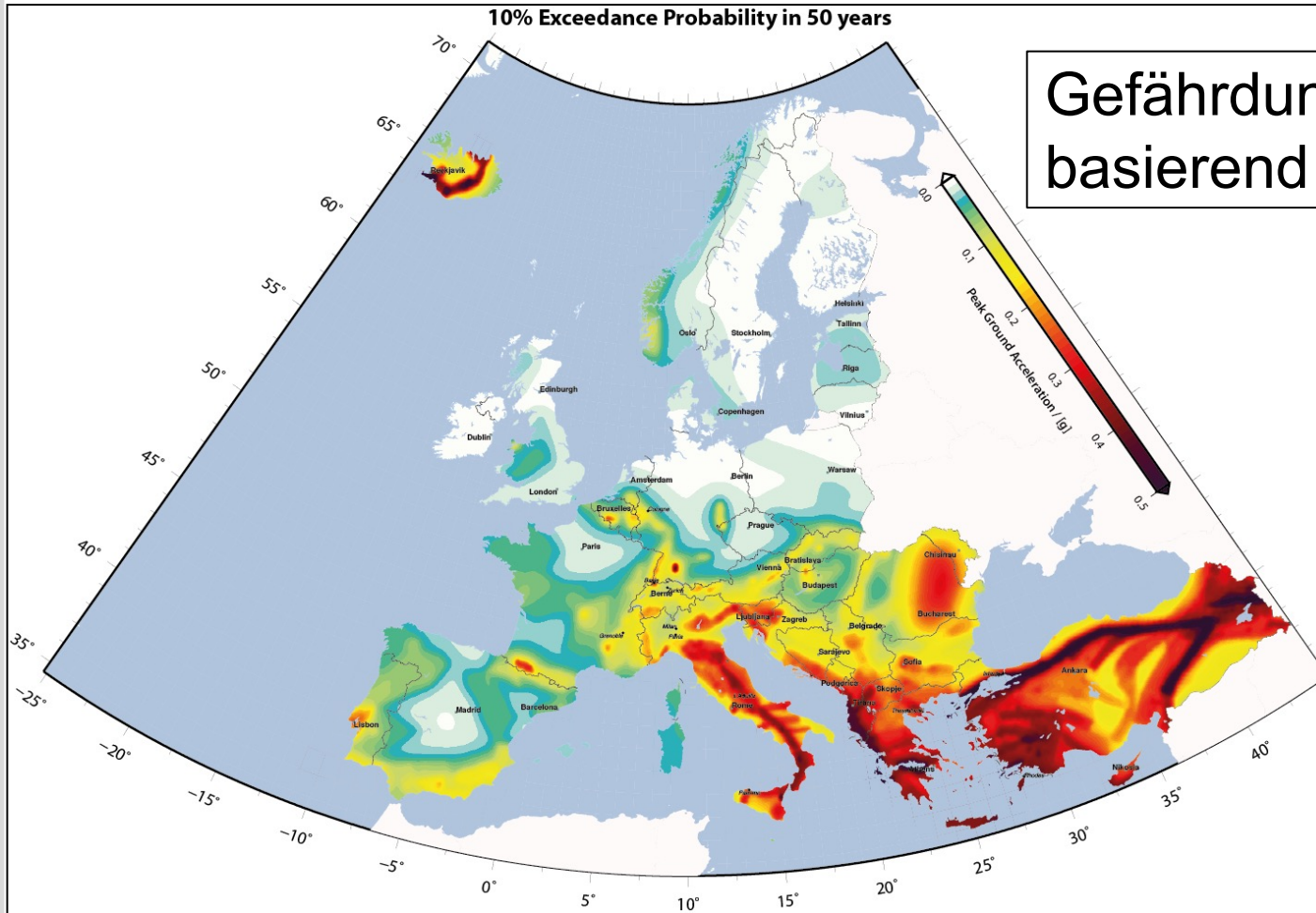


Seismische Gefährdung

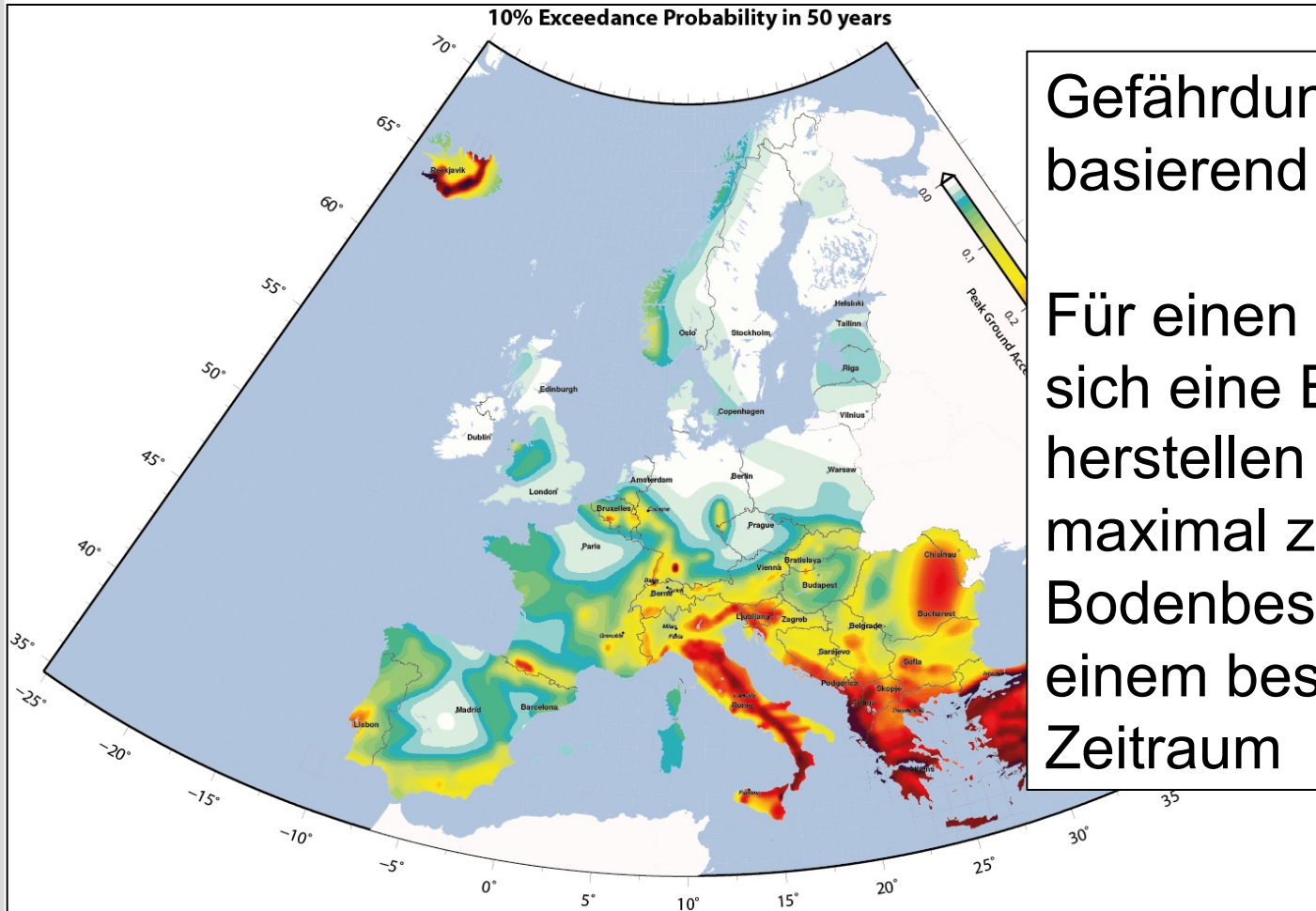


Gefährdungskarte basierend
auf maximaler Intensität

Seismische Gefährdung

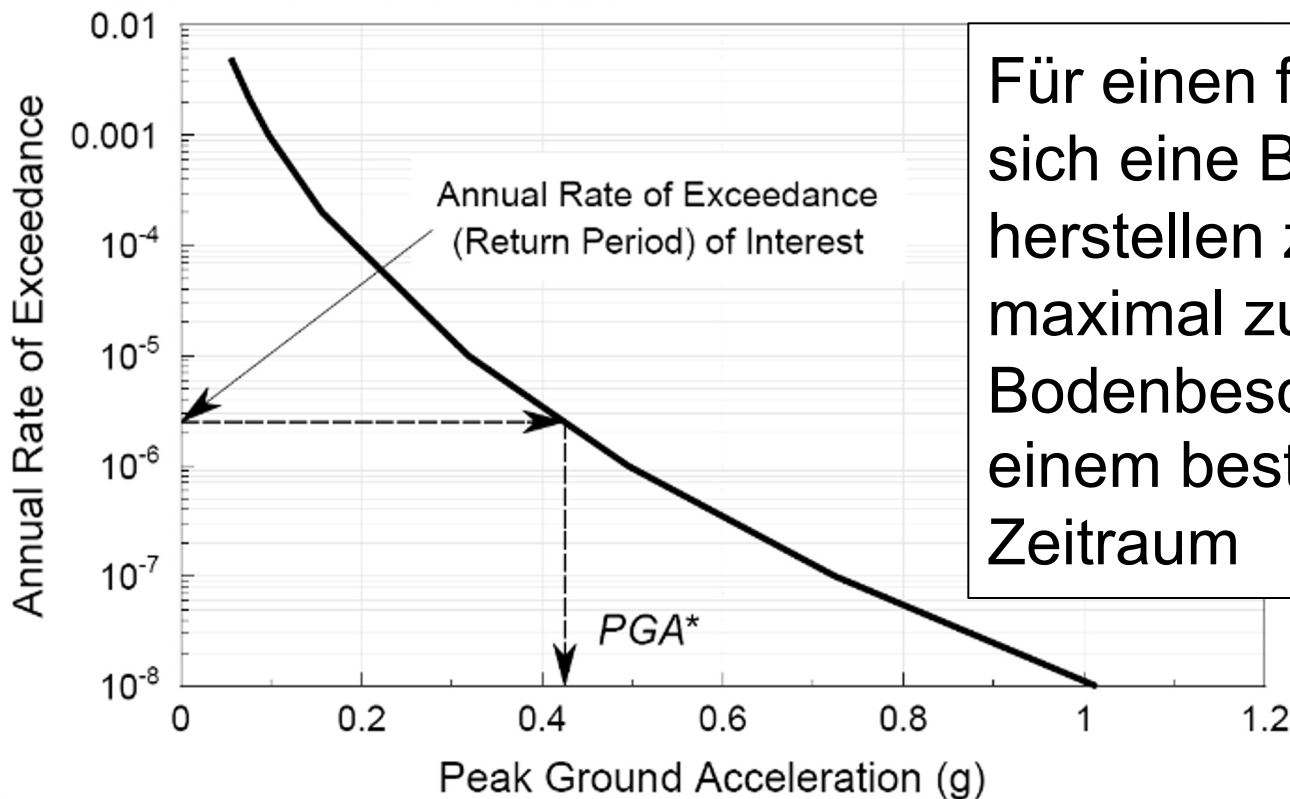


Gefährdungskarte
basierend auf PGA



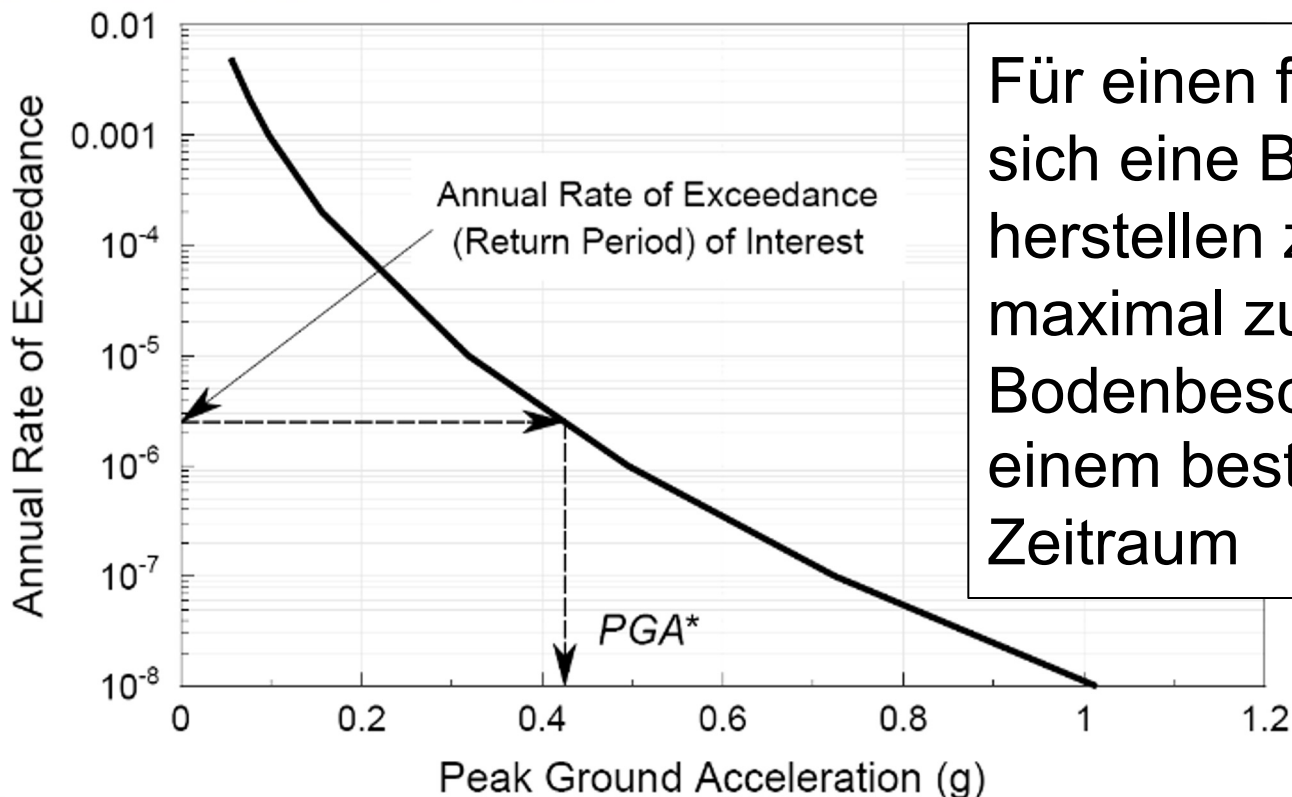
Gefährdungskarte
basierend auf PGA

Für einen festen Ort lässt
sich eine Beziehung
herstellen zwischen der
maximal zu erwartenden
Bodenbeschleunigung in
einem bestimmten
Zeitraum



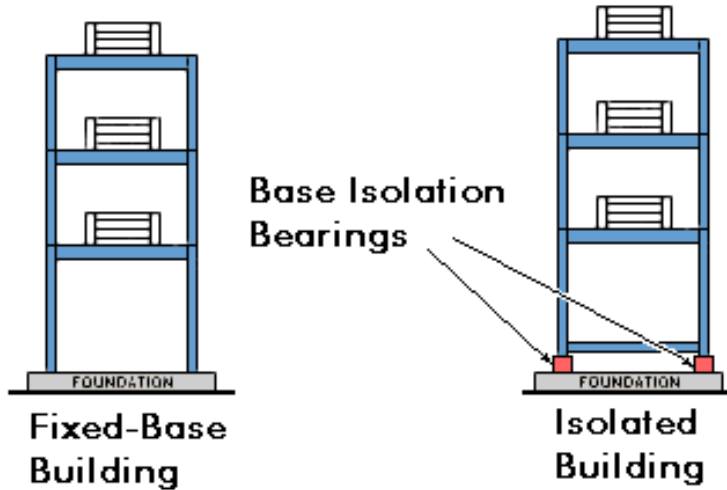
Für einen festen Ort lässt sich eine Beziehung herstellen zwischen der maximal zu erwartenden Bodenbeschleunigung in einem bestimmten Zeitraum

Gefährdungsanalyse erlaubt Aussage,
welche Gefährdung zu erwarten ist:
Bauvorschriften

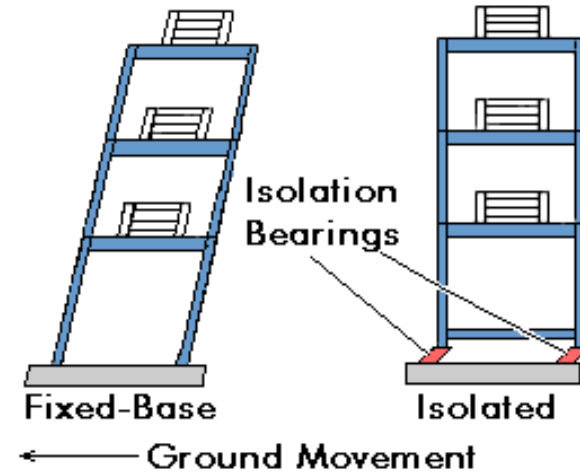
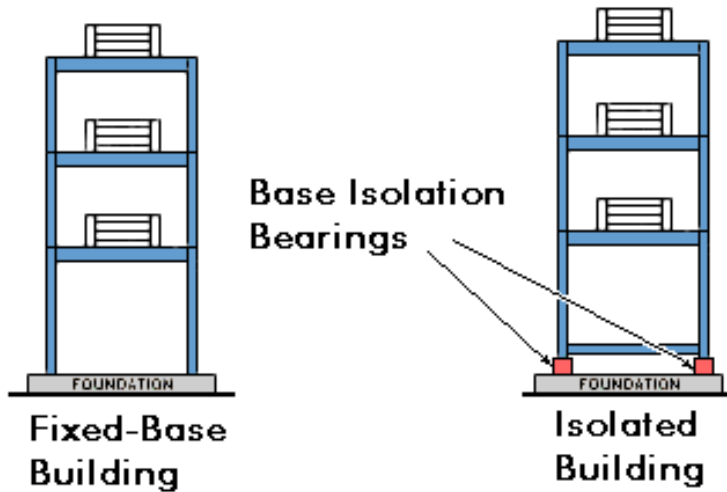


Für einen festen Ort lässt sich eine Beziehung herstellen zwischen der maximal zu erwartenden Bodenbeschleunigung in einem bestimmten Zeitraum

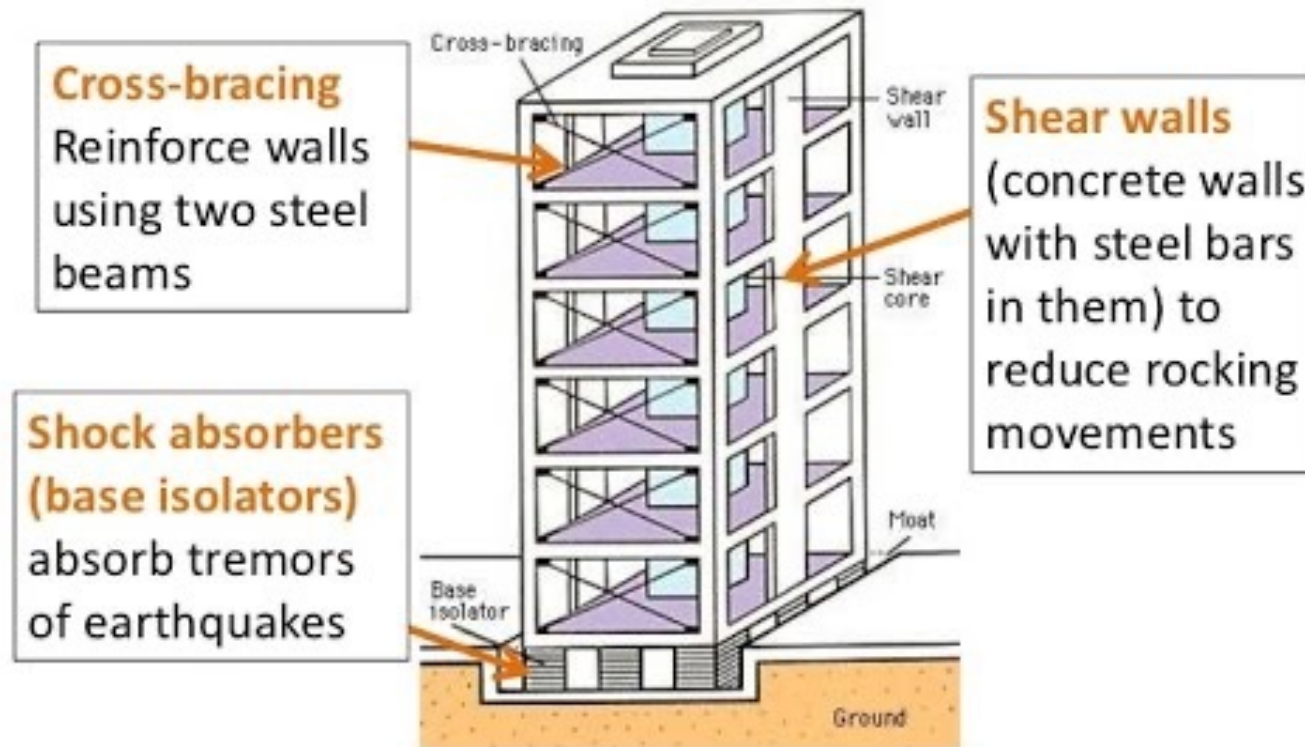
Maßnahmen an Gebäuden



Maßnahmen an Gebäuden

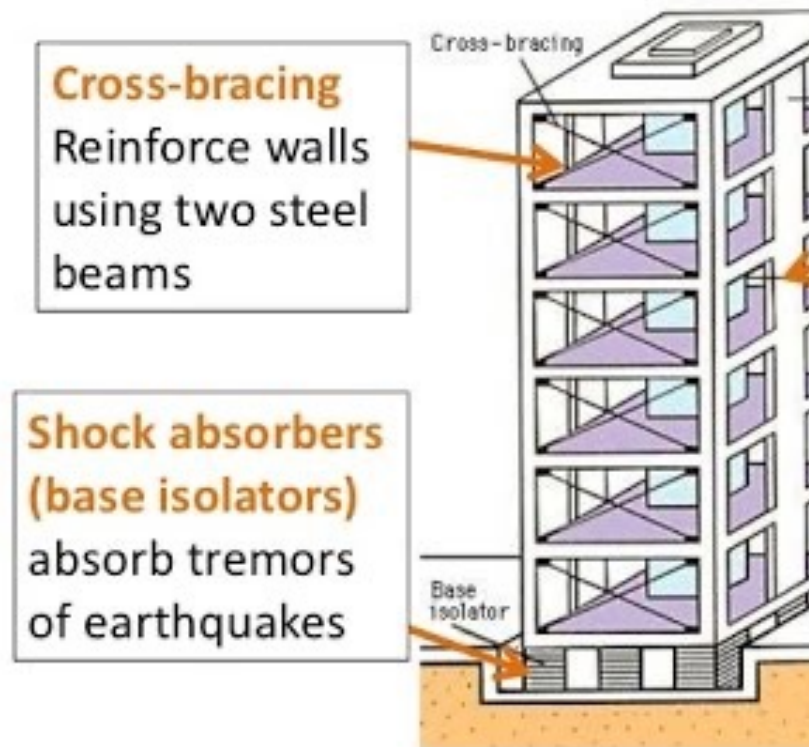


Earthquake Resistant Building

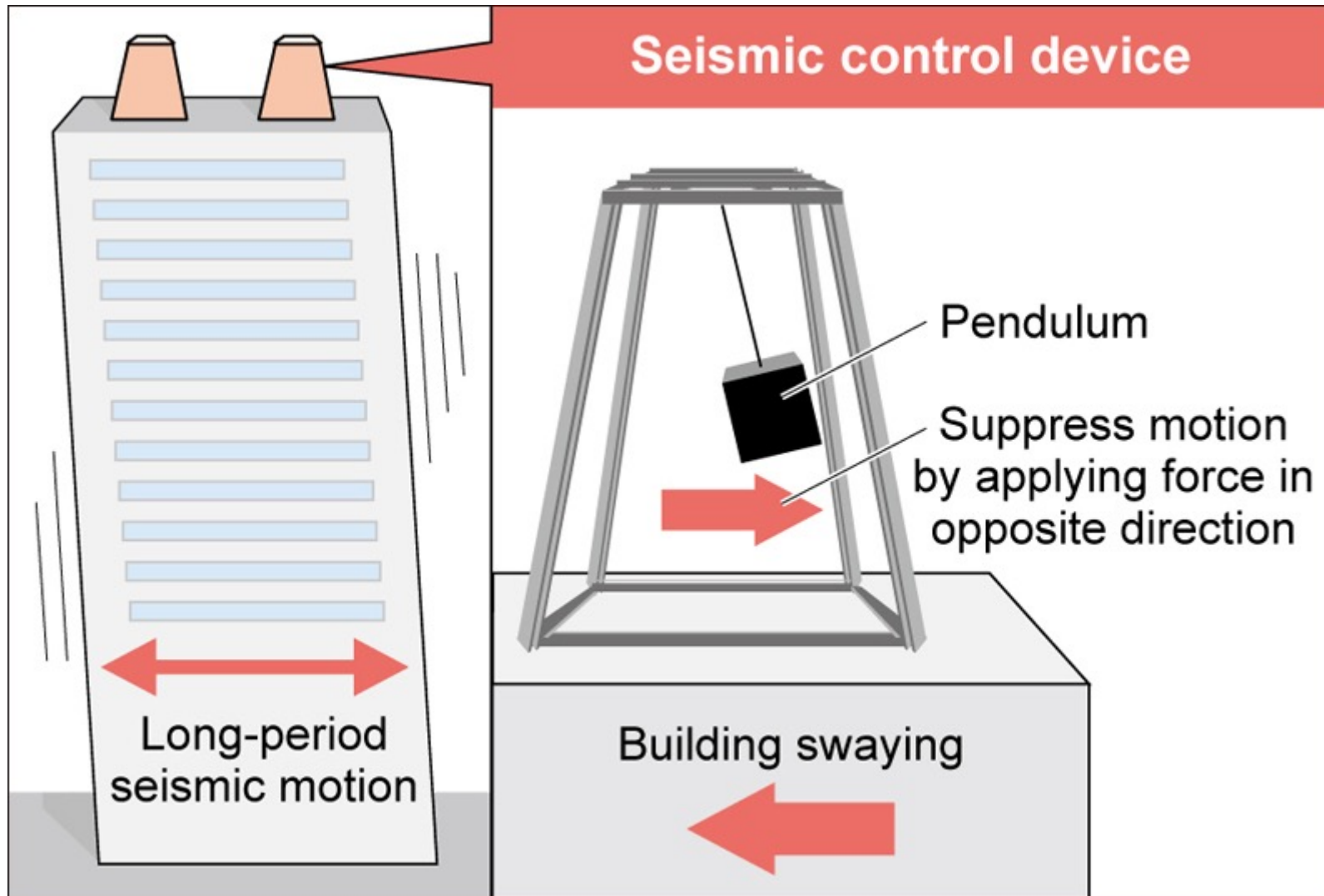


Maßnahmen an Gebäuden

Earthquake Resistant Build



Maßnahmen an Gebäuden



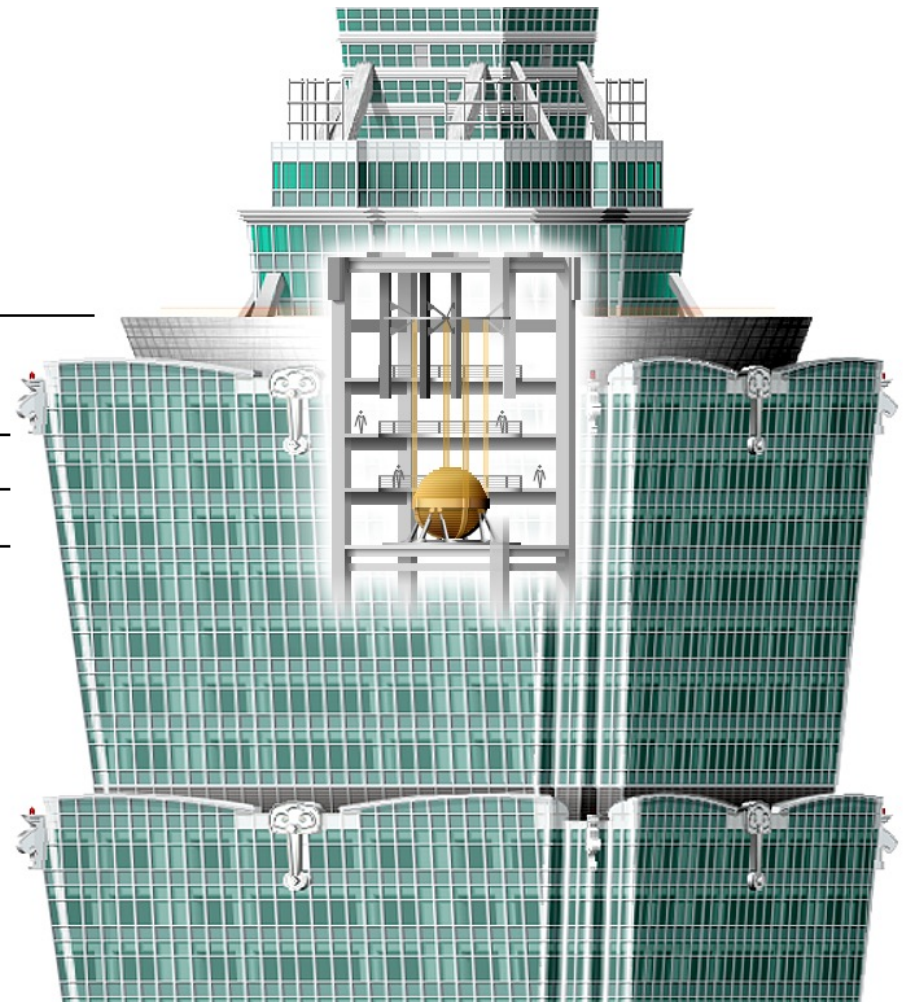
Maßnahmen an Gebäuden

91st Floor [390.60 m]
(Outdoor Observation Deck)

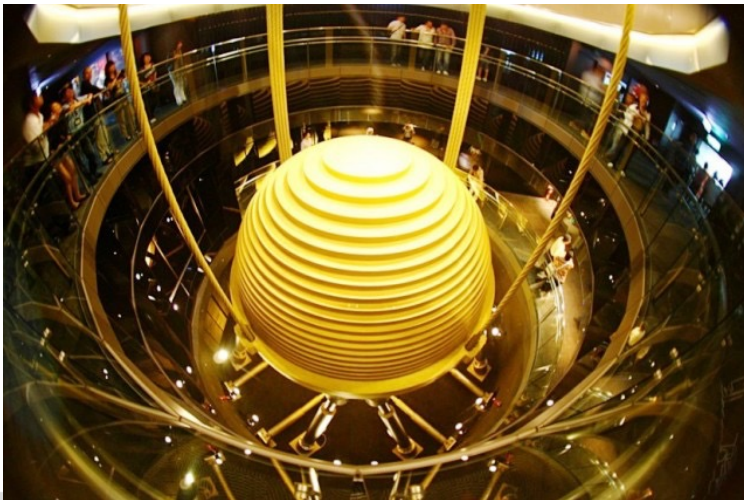
89th Floor [382.20 m]
(Indoor Observation Deck)

88th Floor

87th Floor



Taipei 101

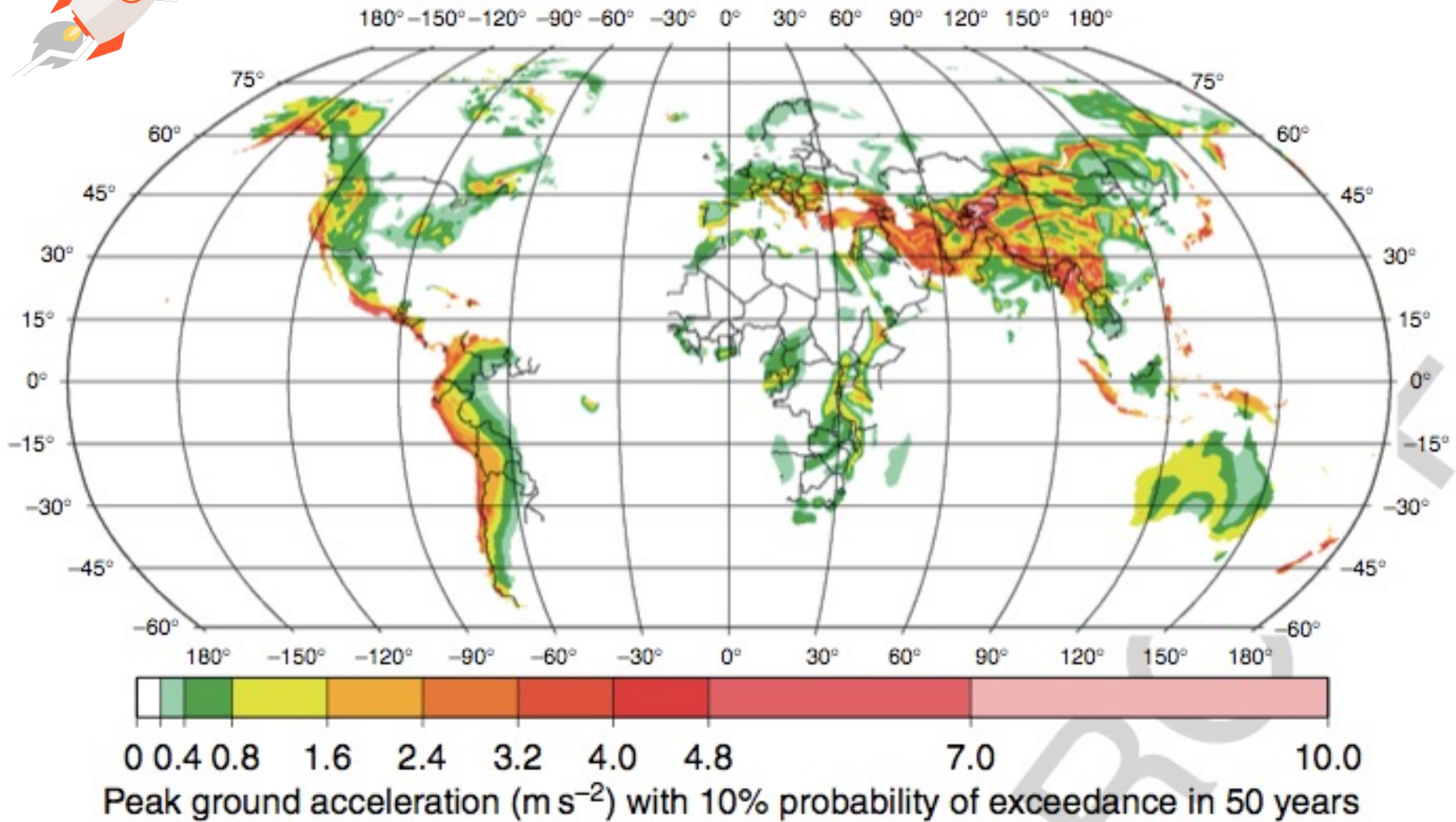




Zusammenfassung – Take-home-message

- Wie ist die weltweite und regionale Seismizität charakterisiert?
- Gibt es Möglichkeiten, die Verteilung von Erdbeben quantitativ zu erfassen?
- Wie wird die Magnitude bestimmt?
- Welche unterschiedlichen Magnituden gibt es und warum gibt es diese Vielfalt?
- Worin unterscheidet sich Magnitude und Intensität?
- Welche Gefährdung tritt durch Erdbeben auf?
- Wie lässt sie sich quantifizieren?
- Wie lässt sich das Risiko minimieren?

Global seismic hazard



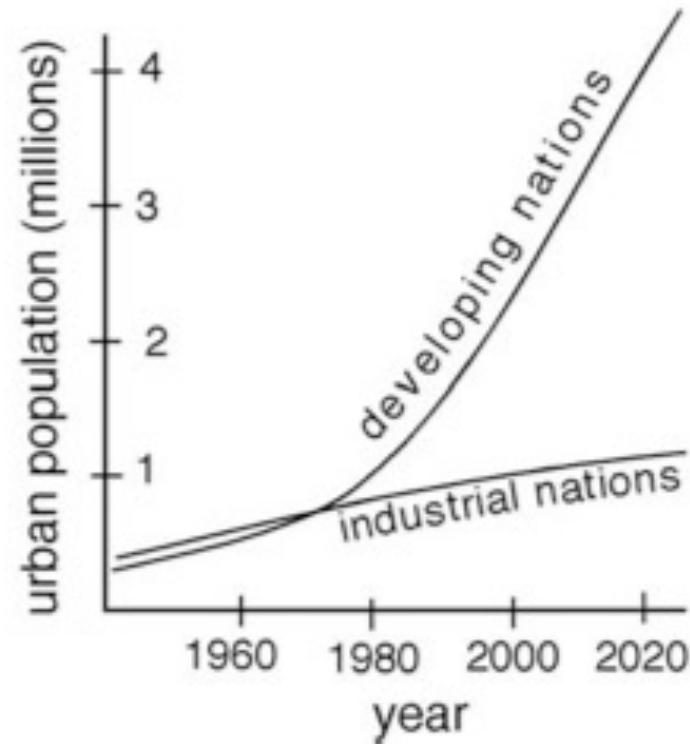
(Figure from Allen, 2007)

Map prepared by the Global Seismic Hazard Assessment Program (Giardini, 1999).



Consequences of urbanization

Urbanization in developing nations is rapid, but is flat in industrial nations.

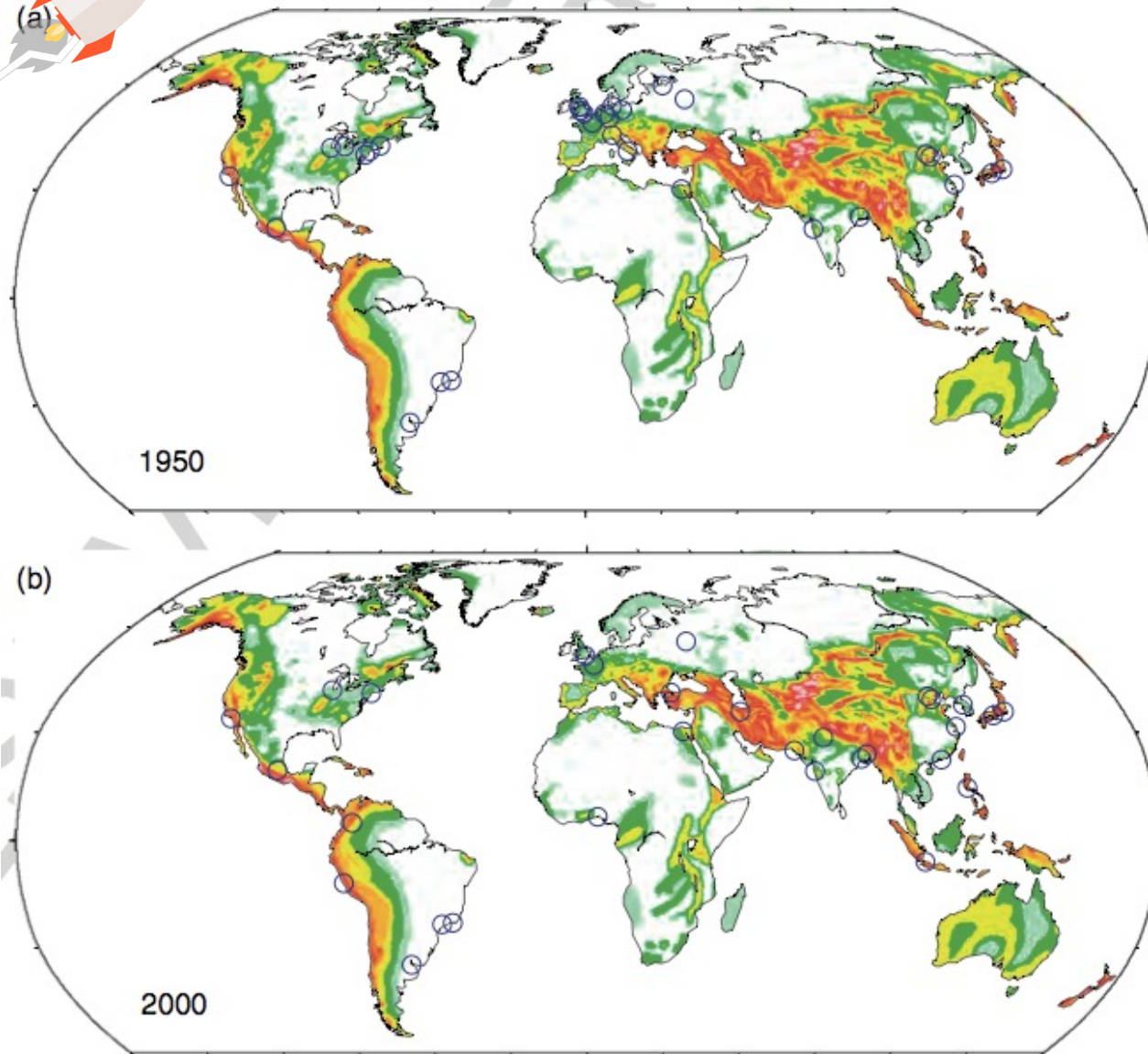


(Figure from Bilham, 2004)

"By the year 2025 more than 5500 million people will live in cities - more than our entire 1990 combined rural and urban population."
(from Roger Bilham's web-page)



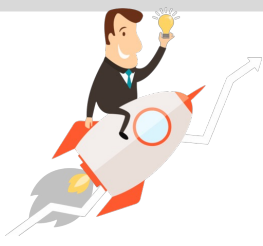
Consequences of urbanization



Note the slower growth of cities in N. America and W. Euro. with respect to cities throughout Asia and S. America.

Thus, the poor are at greater risk than the rich.

The location of the largest cities in 1950 and 2000 superimposed on the hazard map.

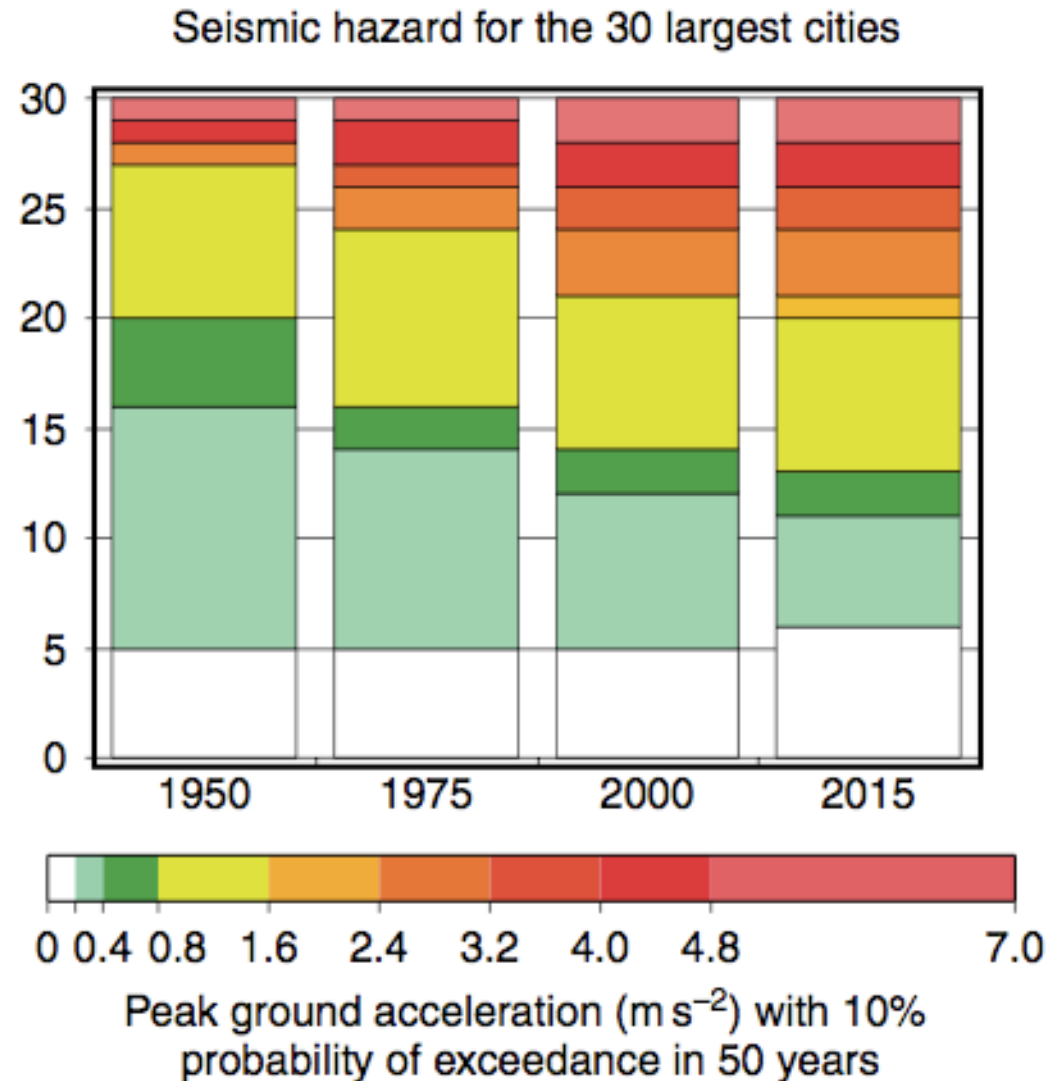


Consequences of urbanization

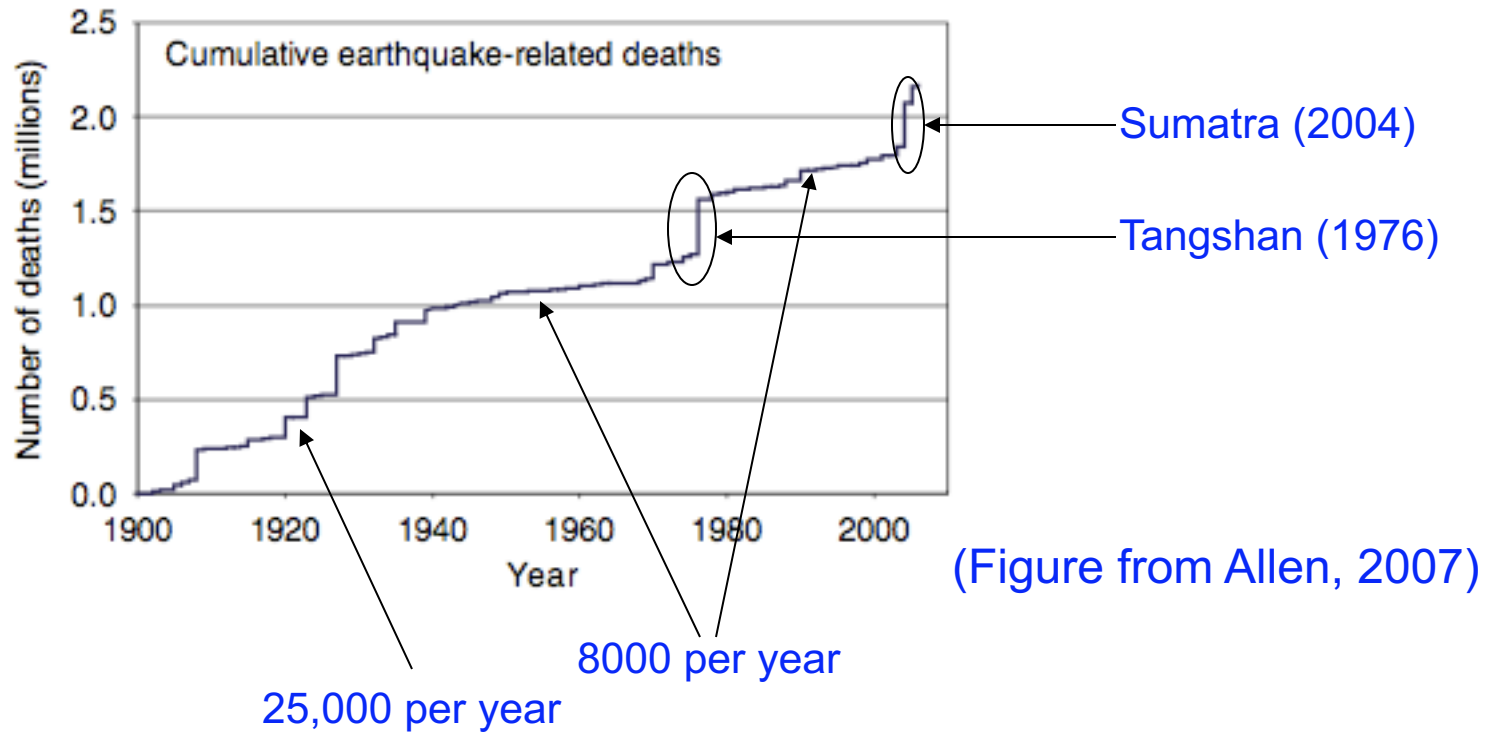
While cities in seismically safe regions are removed from the top 30 list, cities in hazardous regions grow more rapidly.

Question: why are big cities built in areas of high seismic risk?

(Figure from Allen, 2007)



Consequences of urbanization



Note that:

1. The change in character pre- and post- 1940.
2. The two largest quakes did not cause many fatalities.
3. The new millennium started really bad...

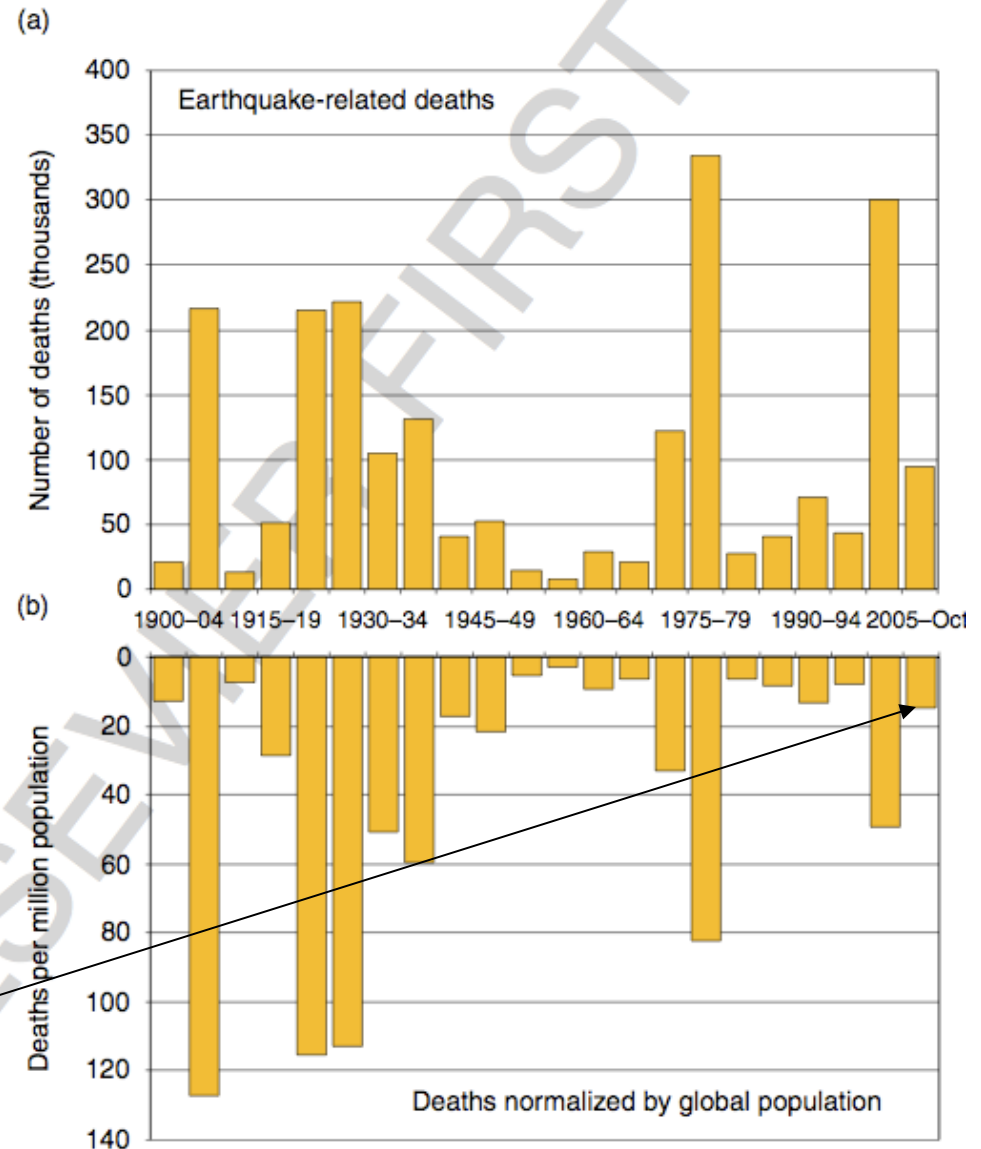




Consequences of urbanization

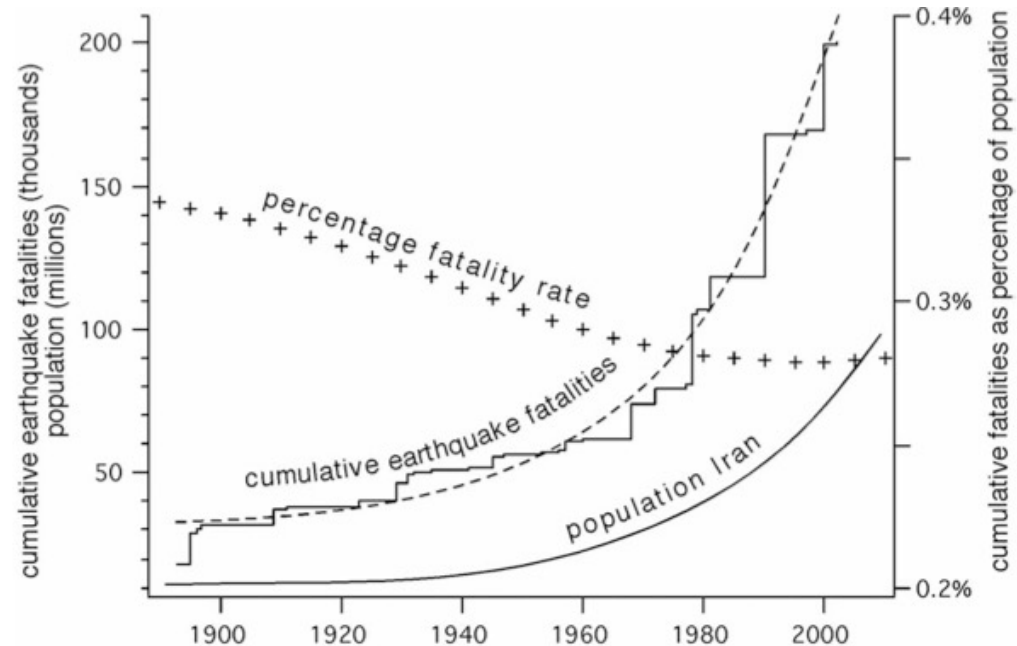
- While the number of fatalities is increasing, it is not increasing as global population.
- Thus, an individual risk of dying has decreased by a factor of 2 since 1950.

The chances of dying of an earthquake are very small. Only 1 out of 200,000 people per year!



Fatalities rate vs. growth rate

The conclusion that fatalities rate increase slower than population growth is **not true for Iran** (and some other developing nations).



(Figure from Bilham, 2004)

- Earthquake fatalities rate in Iran is in pace with the population growth.
- Fatalities rate in Iran is rising at an increasing rate.





Does fatalities rate rises at an increasing rate?

500 years of historical and modern record suggest that the fatalities rate rises at an increasing rate (Bilham, 2004).

(Figure from Bilham, 2004)

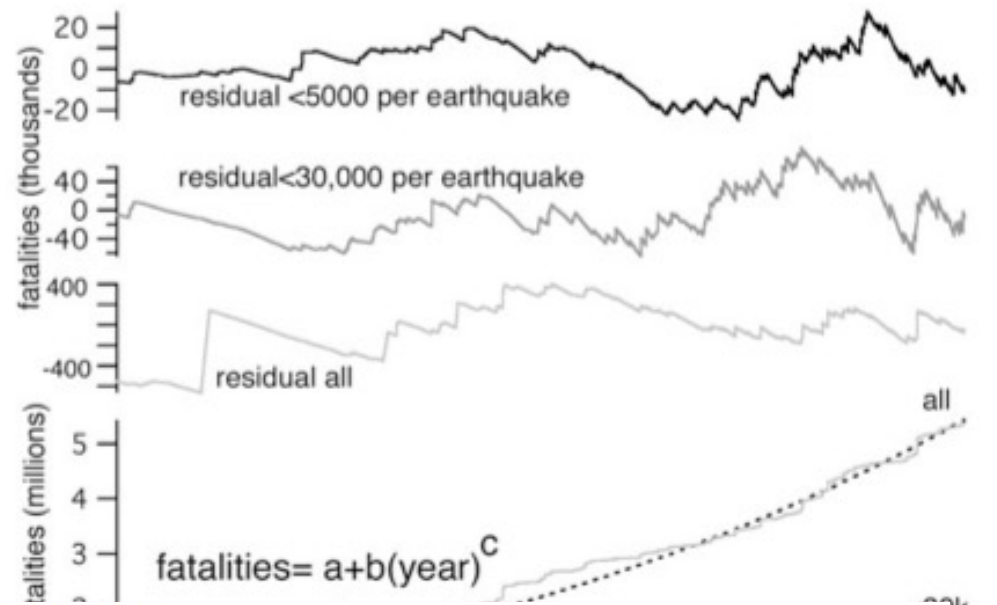


Table 2

Decade-interval forecasts (1900-2030) of annual fatality rate (deaths/year) based on power law fits to 5 centuries of data. Numbers on parenthesis in the first row represent the observed fatality rate 1900-2004, all lower than predicted. The constants a, b and c correspond to the power law variables in figure 3.

	1900-1999	2000-09	2010-19	2020-29	a	b	c
all	16703(10991)	17094	17492	17897	$-(6.4 \pm 0.7)e+05$	$(1.63 \pm 1.3)e-12$	5.62 ± 0.1
<30k	8609(5991)	9015	9439	9881	$-(8.4 \pm 1.6)e+03$	$(2.9 \pm 1.7)e-28$	10.23 ± 0.1
<5k	2702(788)	2849	3004	3166	$-(10.5 \pm 2)e+03$	$(2.2 \pm 1.6)e-33$	11.6 ± 0.1

What to do?

Much of the risk may be mitigated by:

- Education
- Improvement and implementation of building codes.
- Implementation of Early Warning Systems.
- Fault mapping.



Zu Hause: Folien noch einmal durchgehen und ein Foto/ eine Formel/ eine Grafik heraussuchen, die ich mir merken will



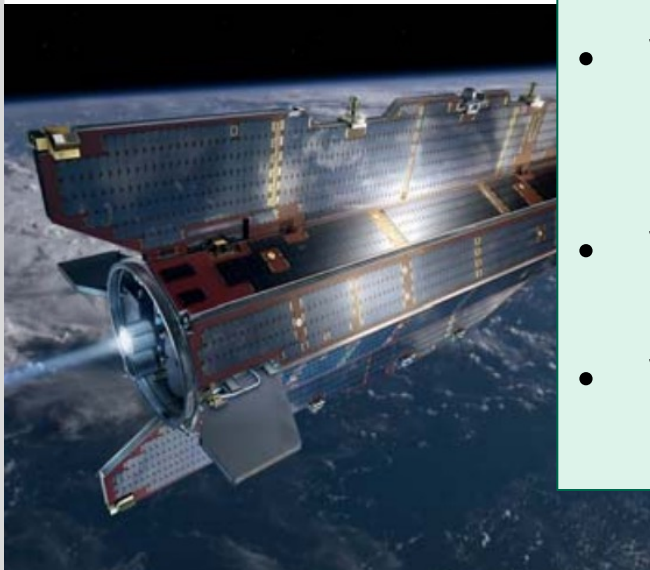
Zusammenfassung – Take-home-message

- Wie ist die weltweite und regionale Seismizität charakterisiert?
- Gibt es Möglichkeiten, die Verteilung von Erdbeben quantitativ zu erfassen?
- Wie wird die Magnitude bestimmt?
- Welche unterschiedlichen Magnituden gibt es und warum gibt es diese Vielfalt?
- Worin unterscheidet sich Magnitude und Intensität?
- Welche Gefährdung tritt durch Erdbeben auf?
- Wie lässt sie sich quantifizieren?
- Wie lässt sich das Risiko minimieren?

Einführung in die Geophysik II

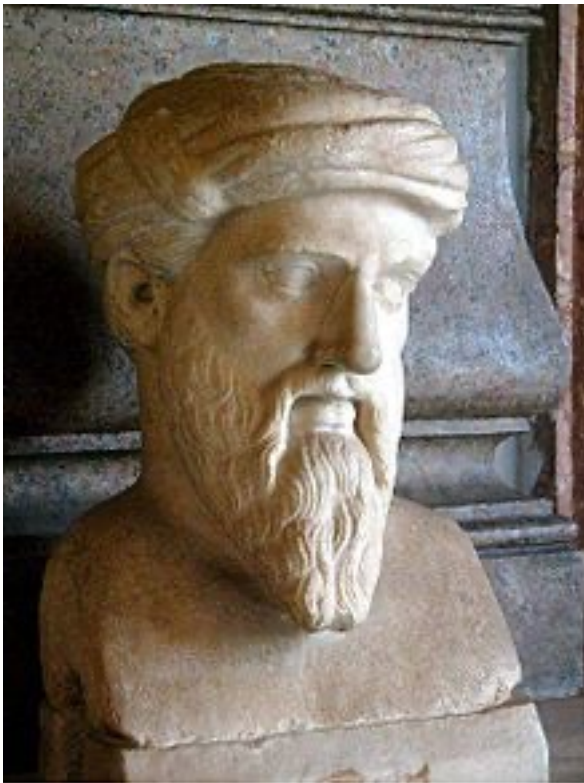
Schwere und Gravimetrie

- Wie lässt sich die Gestalt der Erde (Größe, Form) beschreiben und messen?
- Wie lässt sich die Schwere physikalisch erklären und mathematisch beschreiben? (Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung)
- Wie lässt sich die Schwere messen (= Gravimetrie)?
- Welchen Einfluss haben die Gezeiten auf die Schweremessungen?



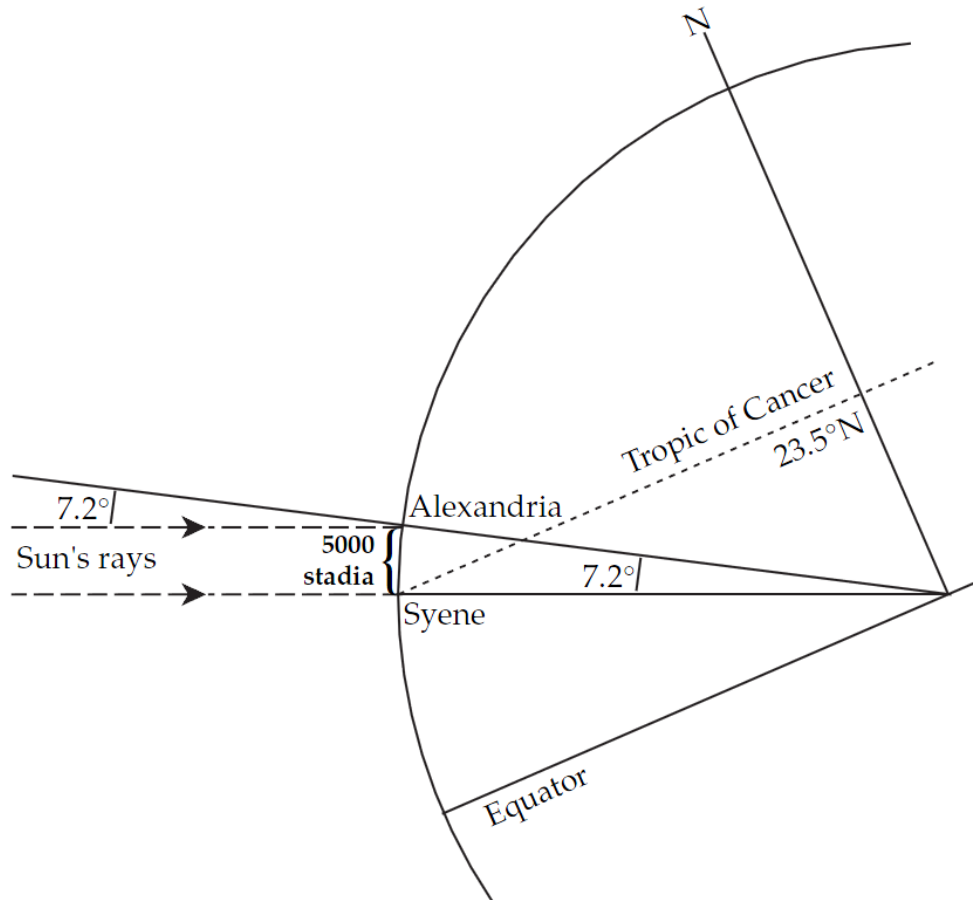
Größe und Figur der Erde

„Nullte“ Näherung: Figur der Erde ist eine Kugel (Pythagoras, 582–507 v. Chr.)



Größe und Figur der Erde

Bestimmung der Größe der Erde: Eratosthenes (275 – 195 v. Chr.)



Beobachtung der Einstrahlung der Sonne in zwei Brunnen, deren Entfernung bekannt war.

Annahme: Beide Städte liegen auf gleichem Meridian.

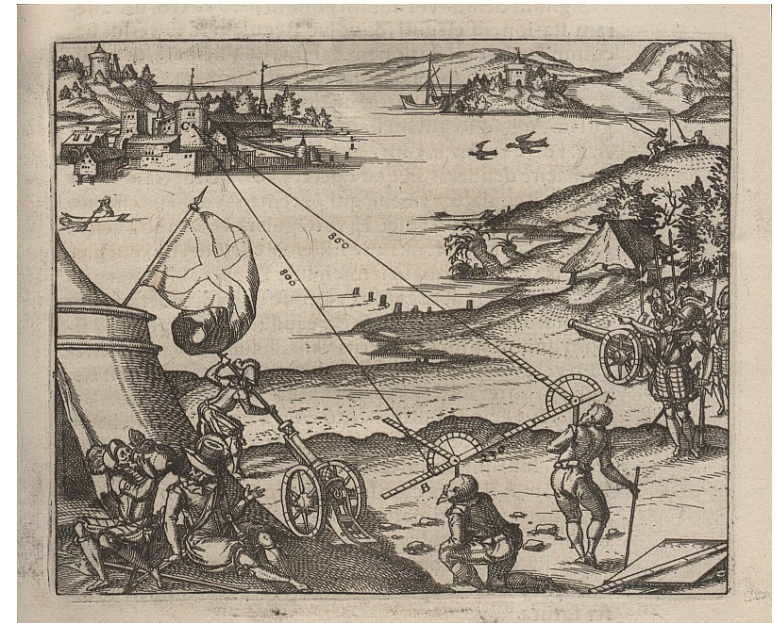
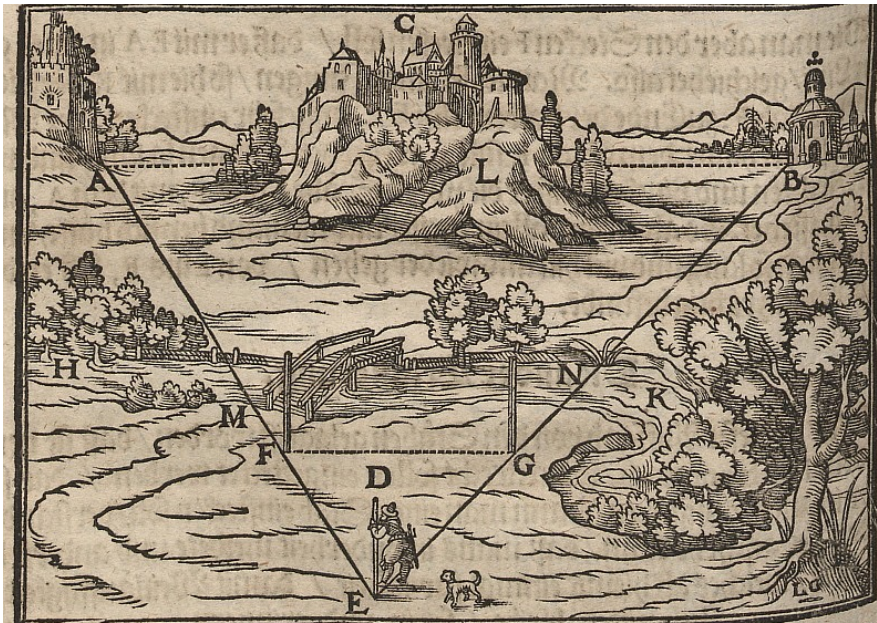
Bestimmung des Erdumfangs zu 46250 km (moderner Wert: 40030 km)

Quelle: Lowrie, 2007

Größe und Figur der Erde

Jean Picard (1620 – 1682): Vermessung der Erde mit der Methode der Triangulation

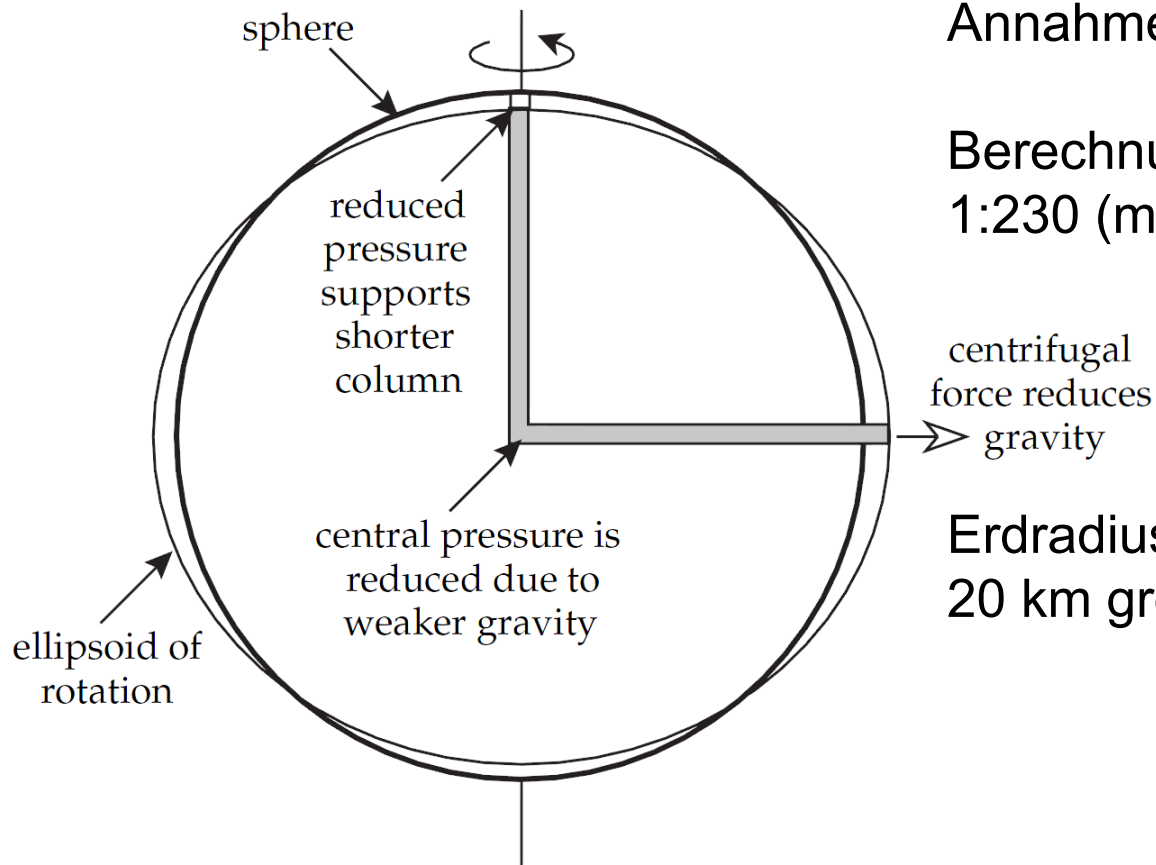
Bestimmung des Erdradius zu 6372 km (moderner Wert: 6371 km)



Quelle: Deutsche Fotothek

Größe und Figur der Erde

Sir Isaac Newton (1643 – 1727): Erste Näherung: Erde ist Rotationsellipsoid



Annahme: konstante Dichte

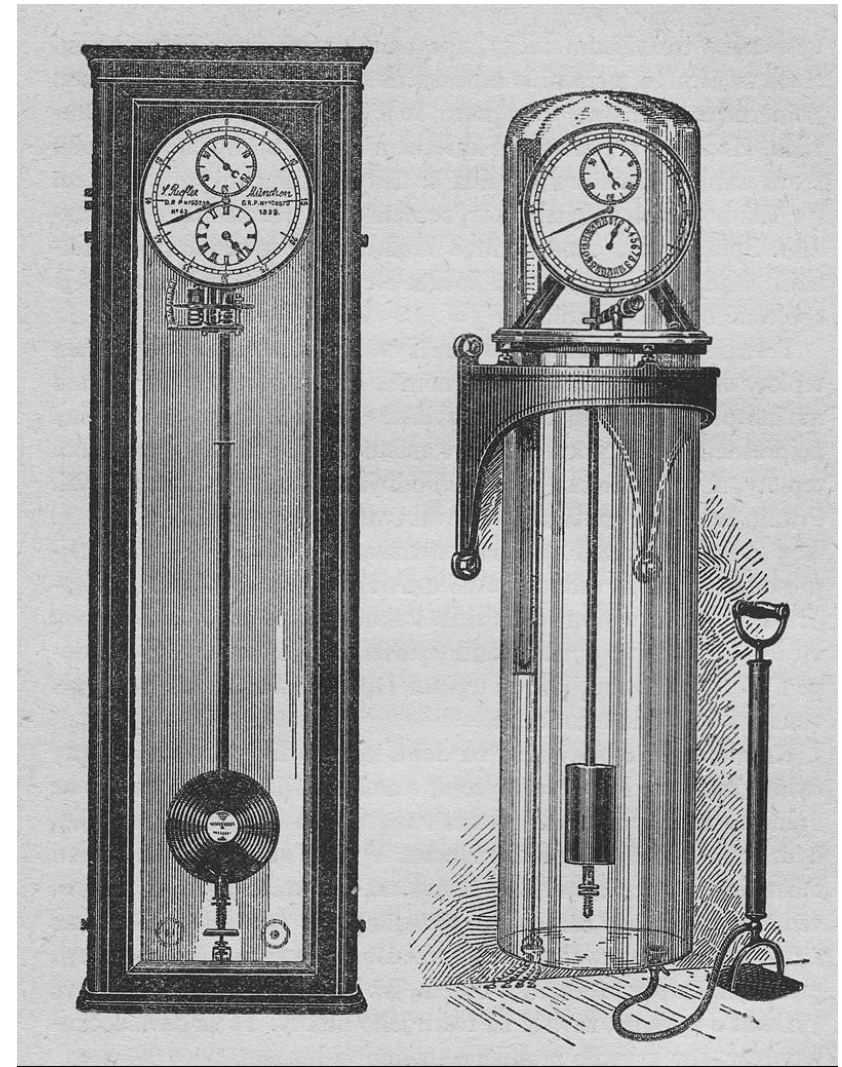
Berechnung der Abplattung zu
1:230 (moderner Wert: 1:298)

Erdradius ist am Äquator ca.
20 km größer als an Polen

Quelle: Lowrie, 2007

Größe und Figur der Erde

Jean Richer (1630 – 1696):
Ungenauigkeit eines in Paris
geeichten Sekundenpendels am
Äquator, Abweichung um 2,5 Minuten
pro Tag aufgrund größerem Abstand
zum Erdmittelpunkt und stärkerer
Zentrifugalkraft

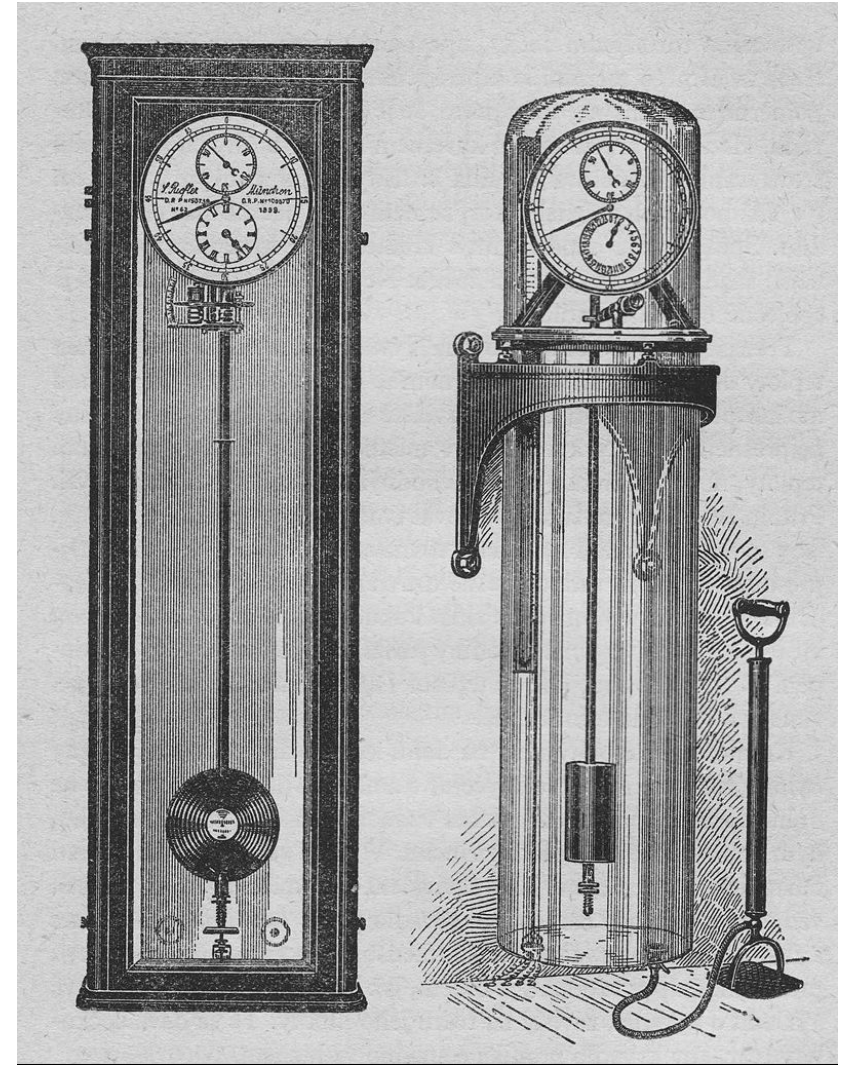


Quelle: Schneider, 1925

Größe und Figur der Erde

Jean Richer (1630 – 1696):
Ungenauigkeit eines in Paris
geeichten Sekundenpendels am
Äquator, Abweichung um 2,5 Minuten
pro Tag aufgrund größerem Abstand
zum Erdmittelpunkt und stärkerer
Zentrifugalkraft

Heute weiß man: am Pol: $9,83 \text{ m/s}^2$,
am Äquator allein wegen größerem
Abstand $9,81 \text{ m/s}^2$, aber mit
Zentrifugalkraft sogar nur $9,78 \text{ m/s}^2 =$
„Normalschwere“



Quelle: Schneider, 1925

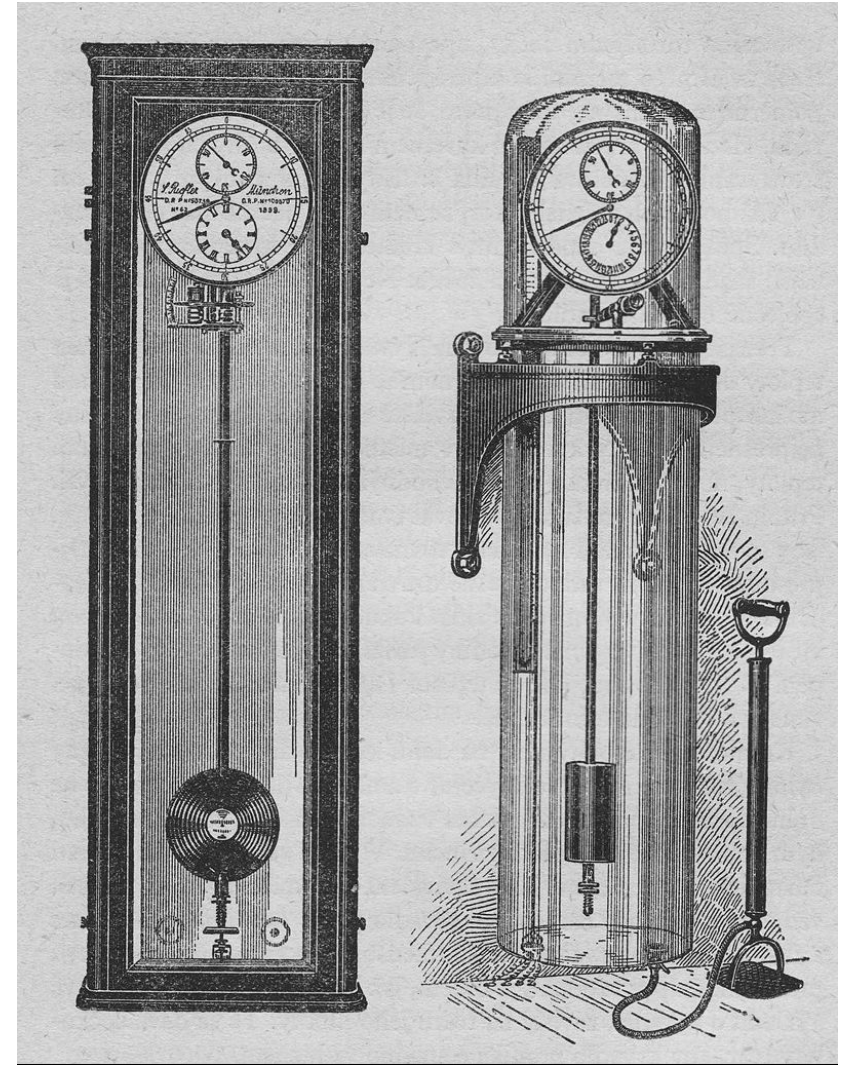
Größe und Figur der Erde

Jean Richer (1630 – 1696):
Ungenauigkeit eines in Paris
geeichten Sekundenpendels am
Äquator, Abweichung um 2,5 Minuten
pro Tag aufgrund größerem Abstand
zum Erdmittelpunkt und stärkerer
Zentrifugalkraft

Heute weiß man: am Pol: $9,83 \text{ m/s}^2$,
am Äquator allein wegen größerem
Abstand $9,81 \text{ m/s}^2$, aber mit
Zentrifugalkraft sogar nur $9,78 \text{ m/s}^2 =$
„Normalschwere“

$$\Delta F = m \cdot \Delta g = m \cdot 0,05 \text{ m/s}^2$$

$$m = 100 \text{ kg} \rightarrow \Delta F = 5 \text{ N} \approx 500 \text{ g}$$



Quelle: Schneider, 1925

Größe und Figur der Erde

Zweite Näherung: Geoid

Ursachen für Formänderung:

- Inhomogenitäten im Untergrund

Geoid ist Äquipotentialfläche,
Schwerefeld des Geoids weicht
von Normalschwere ab

Vermessung des Geoids gibt also
Informationen über Verteilung der
Massen im Untergrund

Δh gegenüber Ellipsoid: ± 100 m

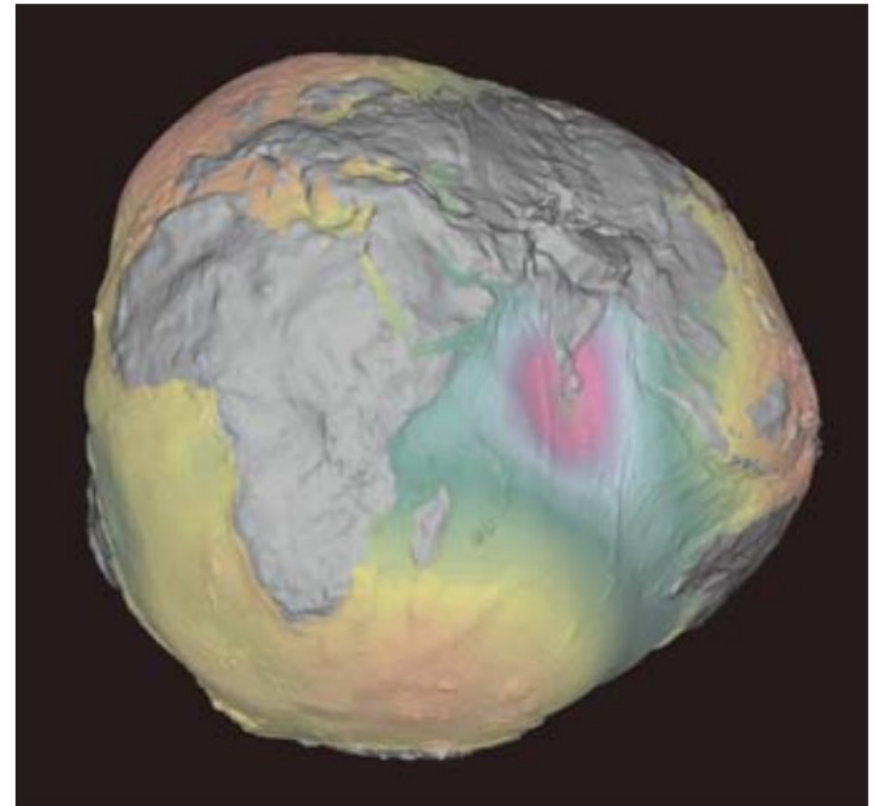
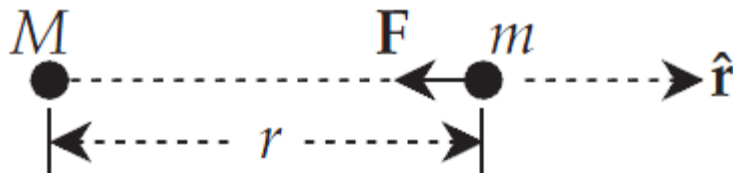


Abb. 1: Das Geoid – die Abweichung der Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes gegenüber dem Rotationsellipsoid in stark überhöhter Darstellung

Schwere

Gravitationsbeschleunigung



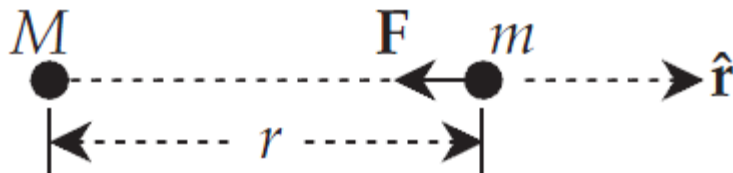
Newtons Gravitationsgesetz für zwei Punktmassen M und m im Abstand r :

Es wirkt eine Kraft $\mathbf{F}$ in die entgegengesetzte Richtung von $\mathbf{r}$. $\mathbf{r}$ ist der Einheitsvektor in Richtung steigender r -Achse, die in M ihren Ursprung hat. G ist die Gravitationskonstante.

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Schwere

Gravitationsbeschleunigung



Newtons Gravitationsgesetz für zwei Punktmassen M und m im Abstand r :

Es wirkt eine Kraft $\mathbf{F}$ in die entgegengesetzte Richtung von $\mathbf{r}$. $\mathbf{r}$ ist der Einheitsvektor in Richtung steigender r -Achse, die in M ihren Ursprung hat. G ist die Gravitationskonstante.

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



$$\mathbf{a}_G = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{a}_G$

Schwere

Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{a}_G$

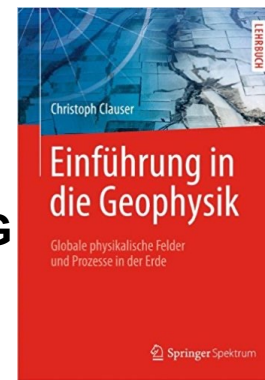
$$\mathbf{a}_G = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a}_g(r) = \mathbf{a}_g(r_E) \left(\frac{r_E^2}{r^2} \right) \quad r \geq r_E ,$$

$$\mathbf{a}_g(r) = \mathbf{a}_g(r_E) \frac{r}{r_E} \quad r < r_E .$$

Schwere

Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{a}_G$



$$\mathbf{a}_G = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a}_g(r) = \mathbf{a}_g(r_E) \left(\frac{r_E^2}{r^2} \right)$$

$$\mathbf{a}_g(r) = \mathbf{a}_g(r_E) \frac{r}{r_E}$$

Außerhalb und auf der Oberfläche einer homogenen Erdkugel ($r \geq r_E$) gleicht das Gravitationspotenzial also dem einer gleich großen Punktmasse im Kugelmittelpunkt. Die zugehörige Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{a}_g$ erhält man hieraus durch Ableiten nach r :

$$\mathbf{a}_g(r) = -\frac{dU_g}{dr} \hat{\mathbf{r}} = -G \frac{M_E}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_g(r_E) \left(\frac{r_E^2}{r^2} \right); \quad r \geq r_E, \quad (4.13)$$

mit der Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche:

$$\mathbf{a}_g(r_E) = -G \frac{M_E}{r_E^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.14)$$

Zur Berechnung des Gravitationspotenzials für innere Aufpunkte ($r < r_E$) unterteilt man die Kugel in eine innere mit Radius r und eine Kugelschale zwischen r und r_E . Für die innere Kugel kann das Ergebnis aus (4.12) verwendet werden, wobei r_E durch r und ρ durch ρ_E ersetzt werden muss:

$$\begin{aligned} U_g(r) &= -G\rho_E \left(\frac{4\pi r^2}{3} + \frac{2\pi}{r} \left(\int_r^{r_E} r_M \int_{r_M-r}^{r_M+r} dr' \right) dr_M \right) \\ &= -2\pi G\rho_E \left(r_E^2 - \frac{r^2}{3} \right); \quad r < r_E. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Hieraus erhält man die zugehörige Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{a}_g$:

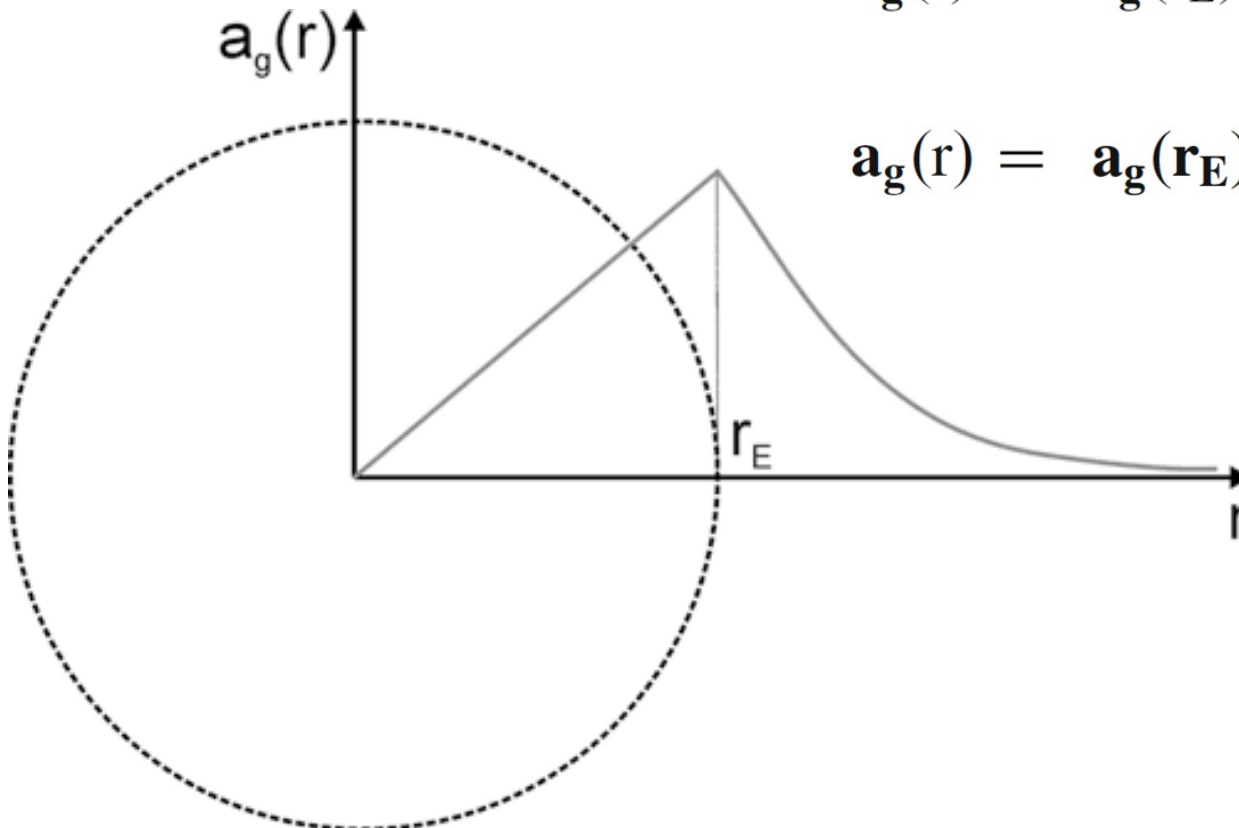
$$\mathbf{a}_g(r) = -\frac{dU_g}{dr} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{4\pi}{3} \rho G r \hat{\mathbf{r}} = \underbrace{-G \frac{M_E}{r_E^3}}_{\text{mit } V=4\pi r_E^3/3} \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_g(r_E) \frac{r}{r_E}. \quad (4.16)$$

Schwere

Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{a_G}$

$$\mathbf{a_g}(r) = \mathbf{a_g}(r_E) \left(\frac{r_E^2}{r^2} \right) \quad r \geq r_E ,$$

$$\mathbf{a_g}(r) = \mathbf{a_g}(r_E) \frac{r}{r_E} \quad r < r_E .$$



Gravitation

Betrachtet wird bisher nur Gravitation, ohne Rotation!

Was passiert mit einem Körper der Masse m , der durch das Innere der Erde fällt? (Übungsaufgabe)

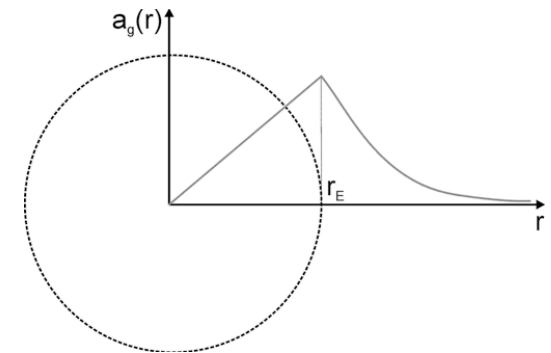
Gravitationsfeld im Inneren der Erde
(konstante Dichte):

$$g(r) = g_0 \cdot \begin{cases} \frac{r}{R_E} & r \leq R_E \\ \frac{R_E^2}{r^2} & r \geq R_E \end{cases}$$

R_E : Erdradius

R : Abstand des Körpers zum
Mittelpunkt

g_0 : Gravitationsbeschleunigung



Gravitation

Der Körper erfährt eine beschleunigende Kraft F_B zum Mittelpunkt:

$$F_B = -m g(r) = -m g_0 r / R_E.$$

Außerdem wirkt auf den Körper die Newtonsche Trägheitskraft

$$F_T = m r''$$

Gravitation

Gleichgewicht beider Kräfte → Gleichsetzen beider Formeln

$$r'' + g_0 r / R_E = 0.$$

Schwingungsgleichung mit der Kreisfrequenz $\omega = 2 \pi / T$,
wobei T die Periode der Schwingung ist:

$$r'' + \omega^2 r = 0$$

Gravitation

Gleichgewicht beider Kräfte → Gleichsetzen beider Formeln

$$r'' + g_0 r / R_E = 0.$$

Schwingungsgleichung mit der Kreisfrequenz $\omega = 2 \pi / T$,
wobei T die Periode der Schwingung ist:

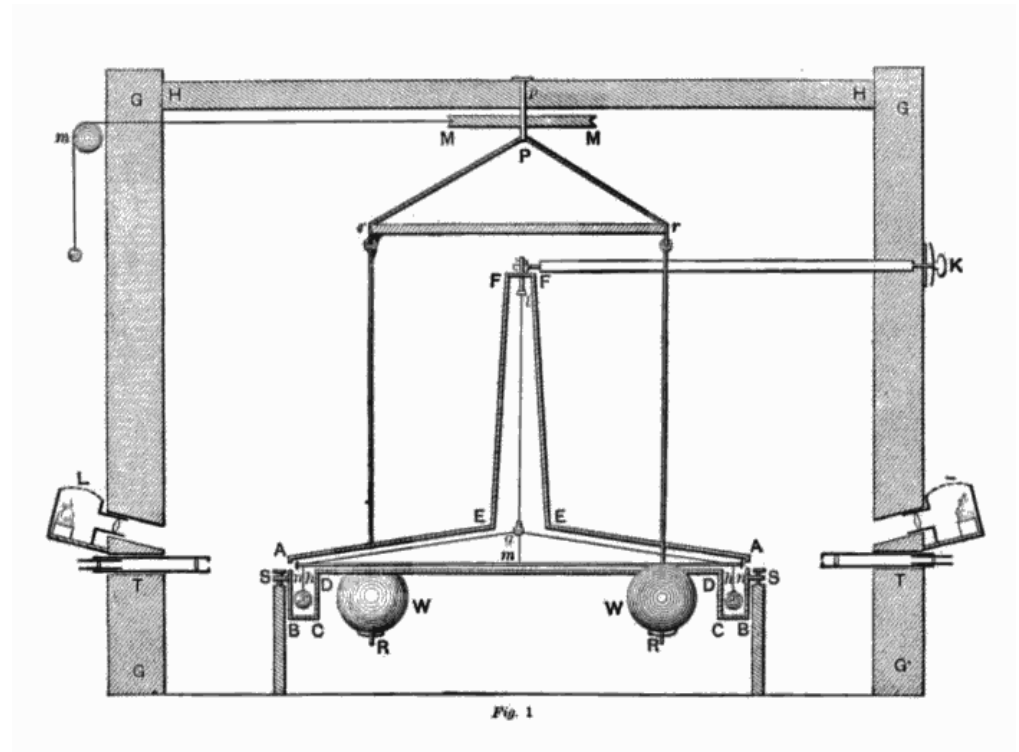
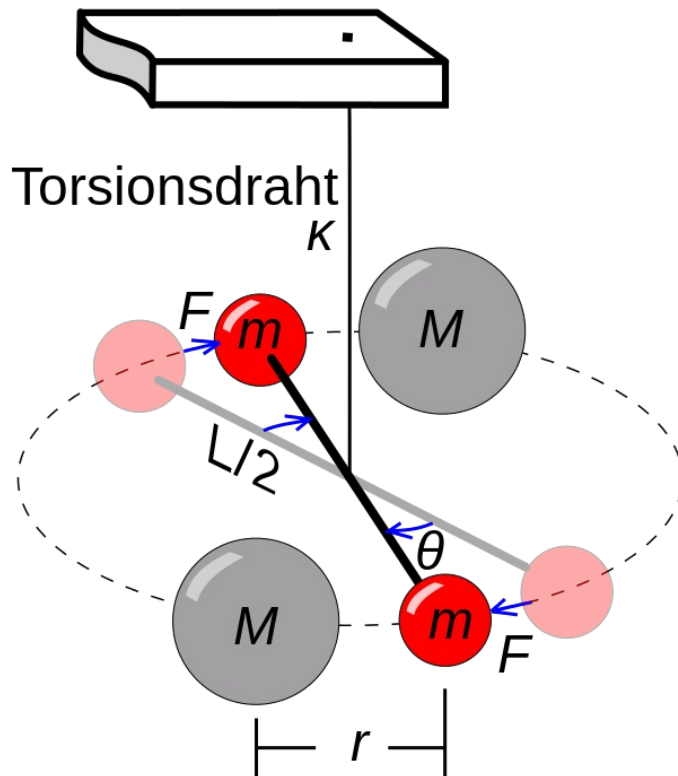
$$r'' + \omega^2 r = 0$$

Lösen durch Einsetzen der Randbedingungen

$$r(0) = R_E \text{ und } v(R_E) = 0 \quad \rightarrow \text{periodische Lösung}$$

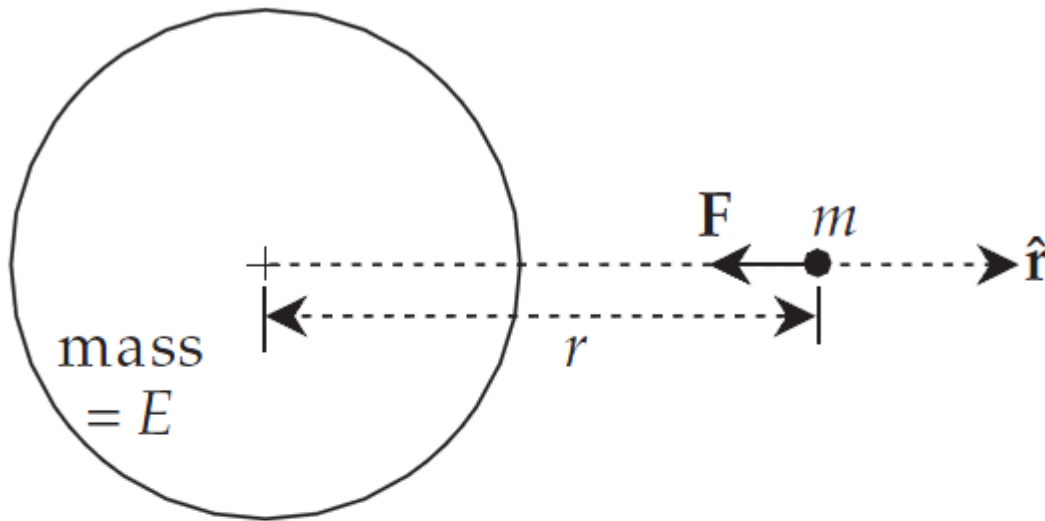
Schwere

Gravitationskonstante G : Konnte erst von Charles Cavendish (1731 – 1810) bestimmt werden



Gravitation

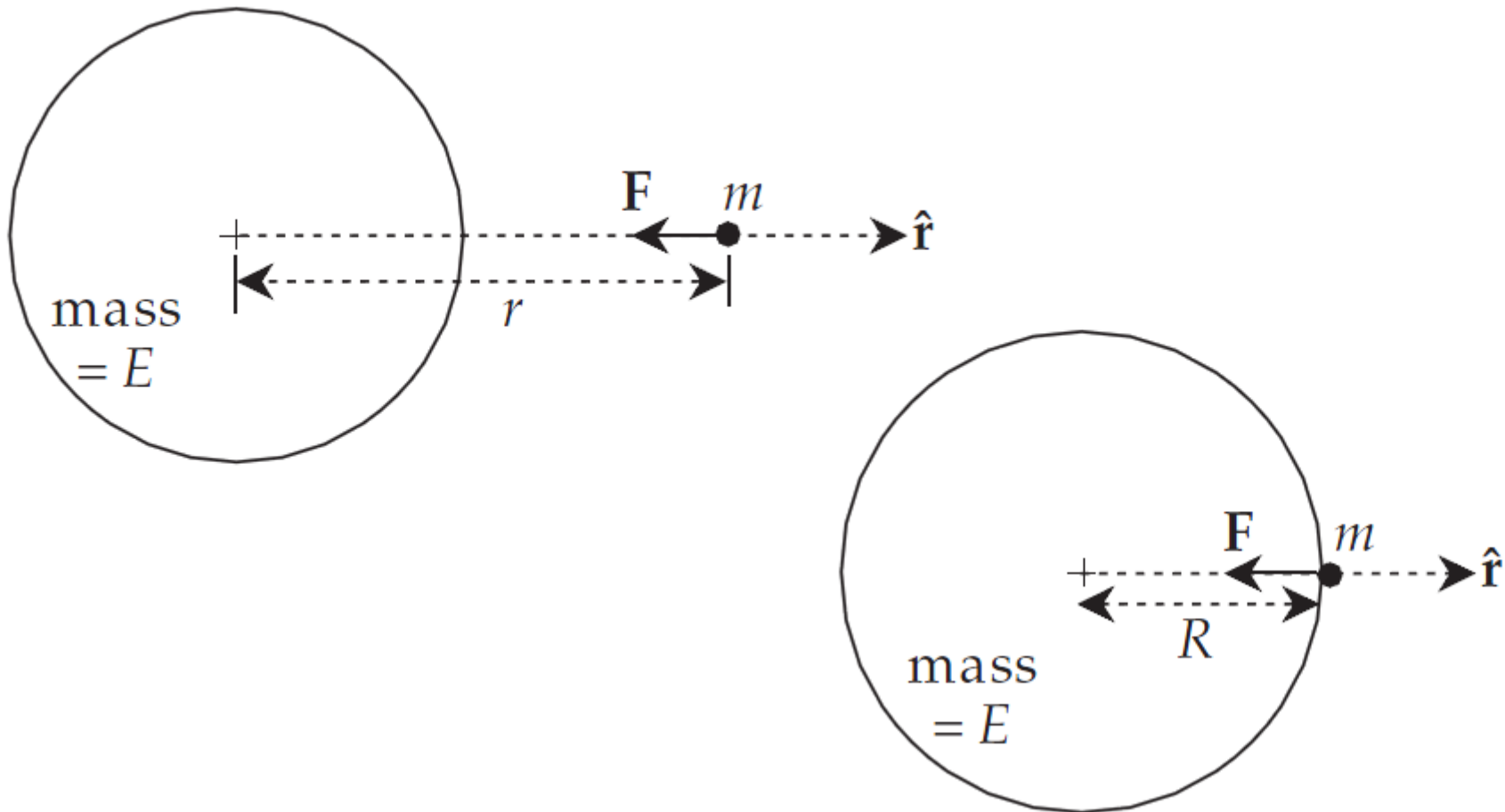
Erde: Ausgedehnte Masse



Quelle: : Lowrie, 2007

Gravitation

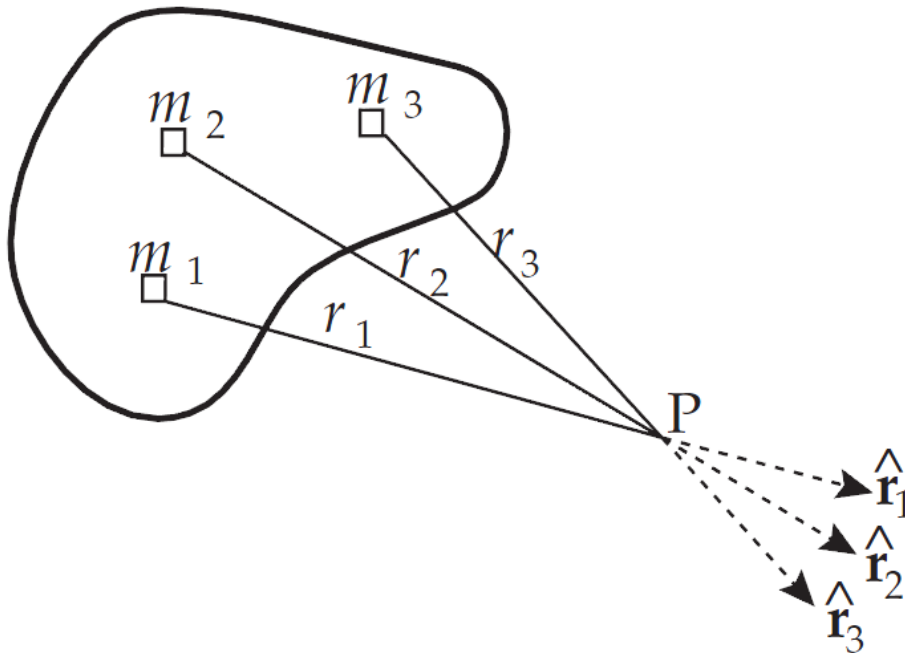
Erde: Ausgedehnte Masse



Quelle: Lowrie, 2007

Gravitation

Erde: Ausgedehnte Masse

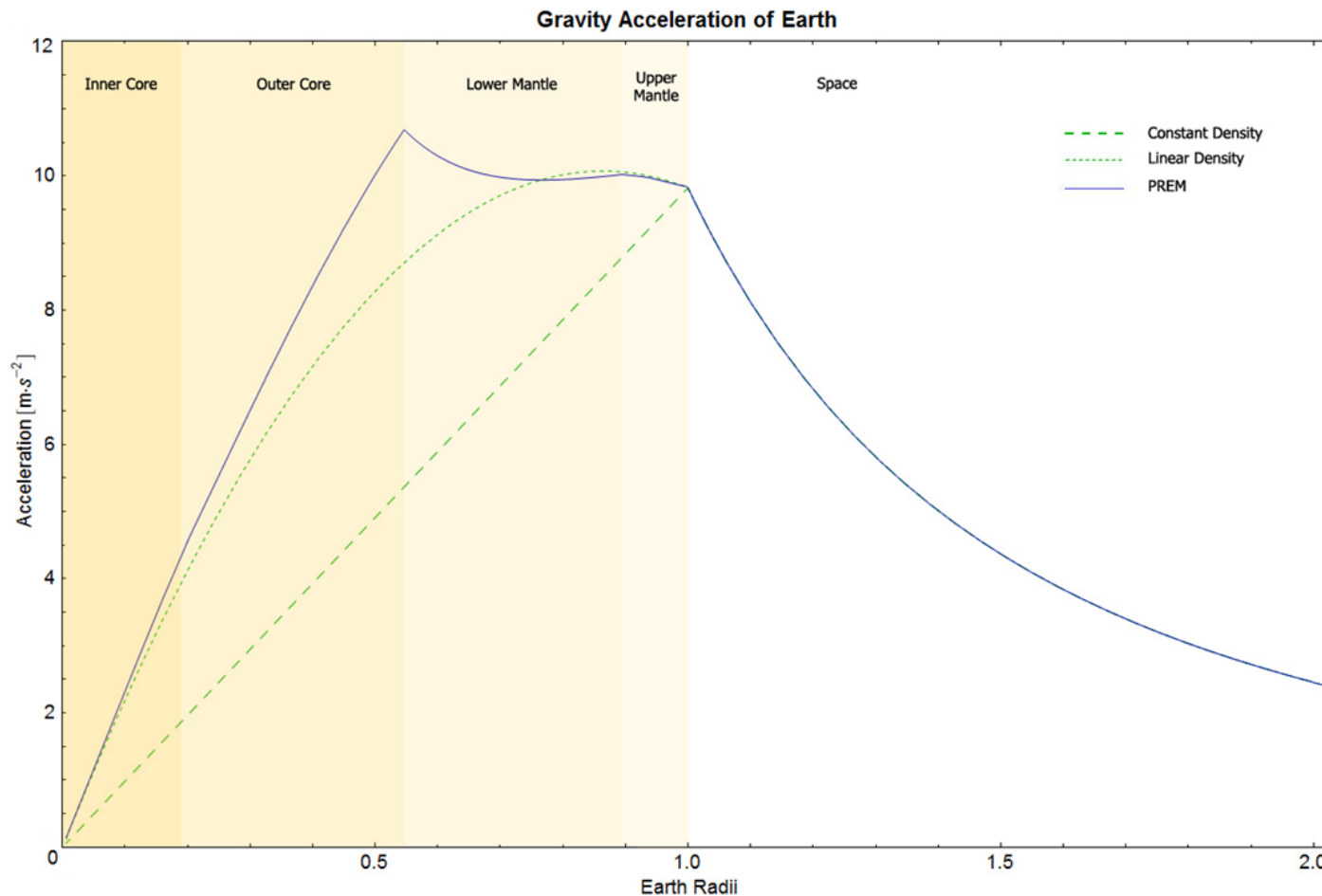


$$\mathbf{a}_G = -G \frac{m_1}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 - G \frac{m_2}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 - G \frac{m_3}{r_3^2} \hat{\mathbf{r}}_3 - \dots$$

Quelle: Lowrie, 2007

Gravitation

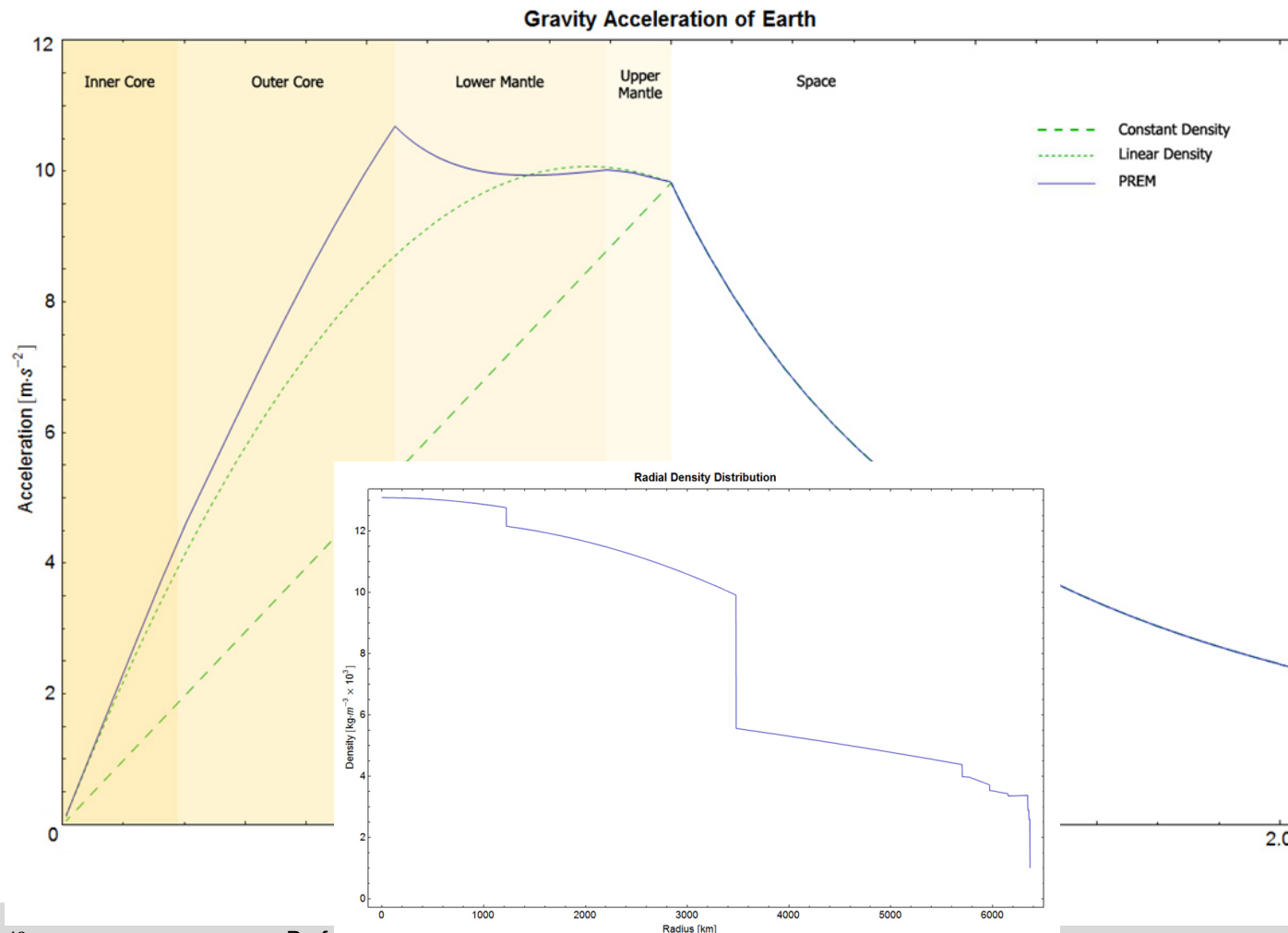
Erde: Effekt der inhomogenen Dichteverteilung



Quelle: Lowrie, 2007

Gravitation

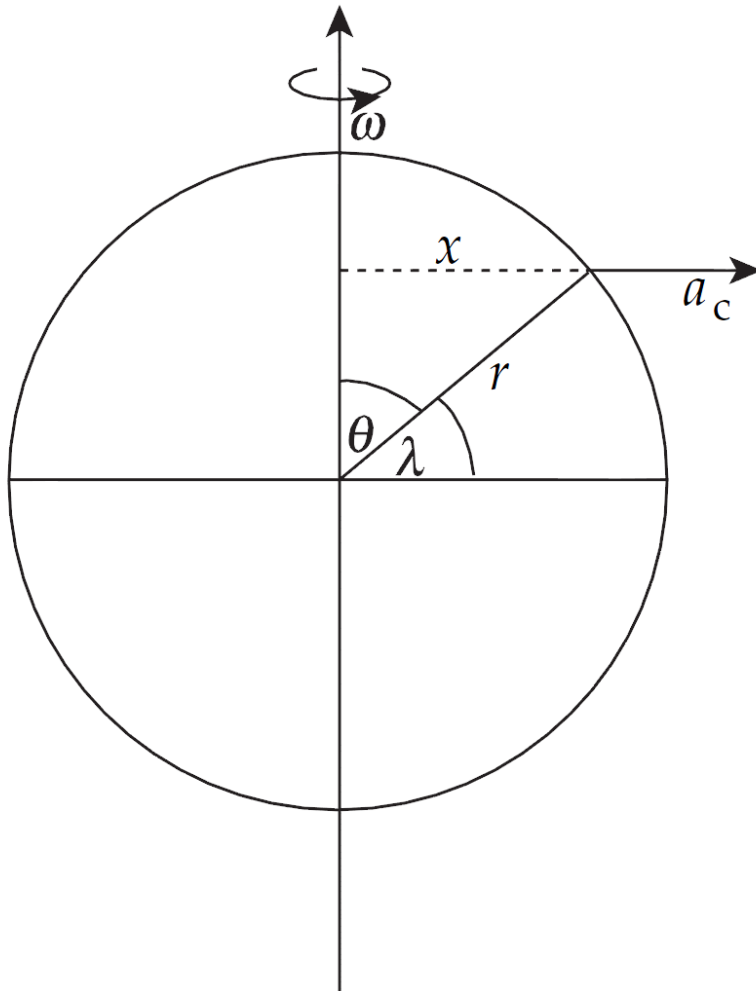
Erde: Effekt der inhomogenen Dichteverteilung



Quelle: Lowrie, 2007

Schwere

Rotation der Erde: Zentrifugalbeschleunigung

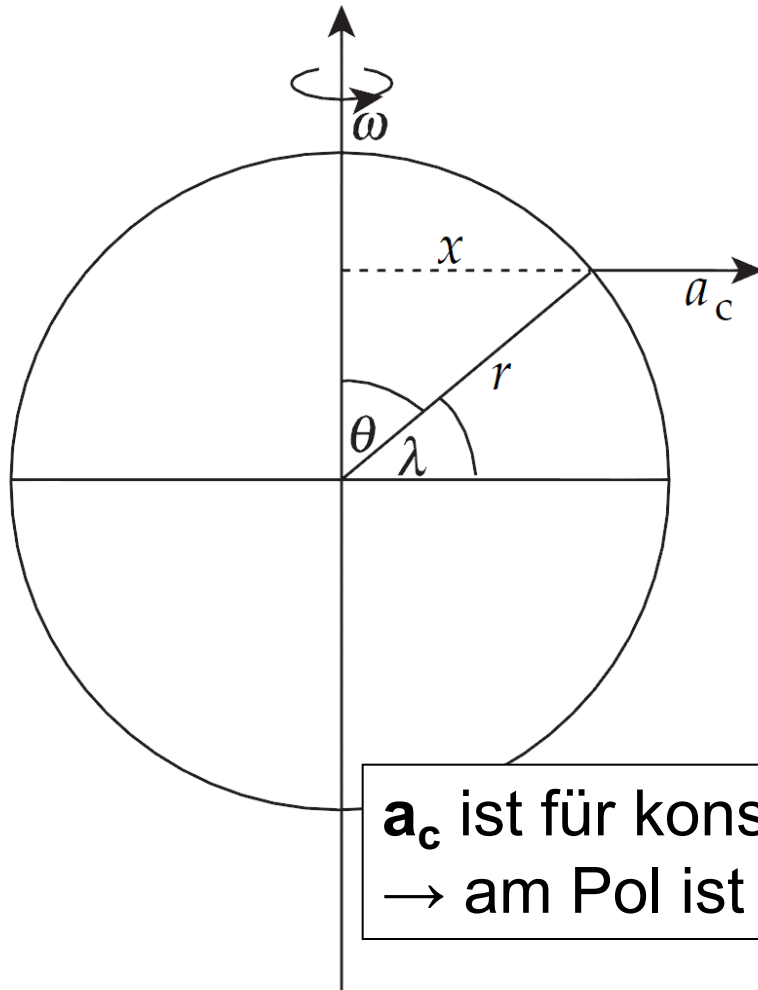


$$\mathbf{a}_c = -\frac{\partial U_c}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} = (\omega^2 x) \hat{\mathbf{x}}$$

Quelle: Lowrie, 2007

Schwere

Rotation der Erde: Zentrifugalbeschleunigung



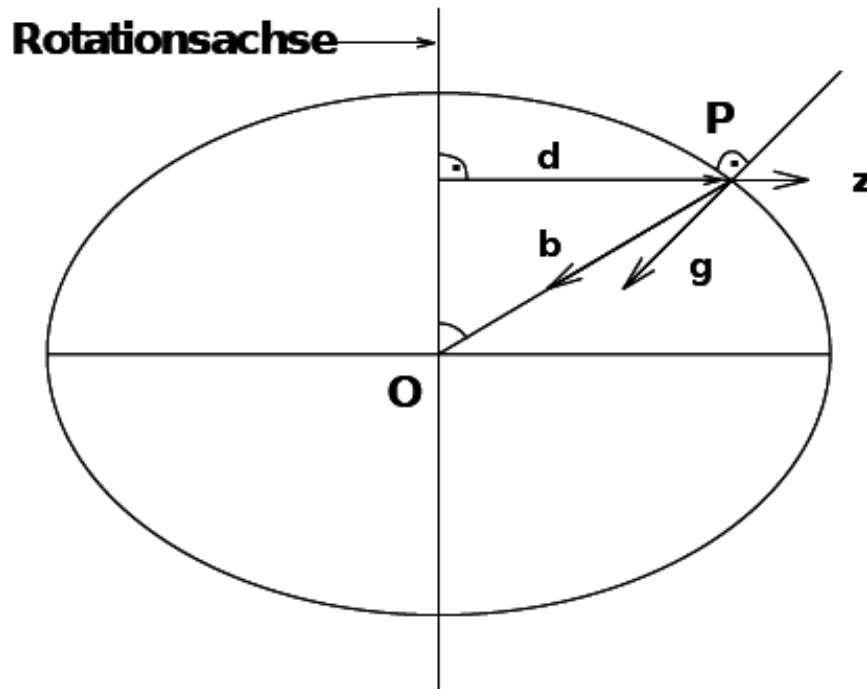
$$\mathbf{a}_c = -\frac{\partial U_c}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} = (\omega^2 x) \hat{\mathbf{x}}$$

$\mathbf{a}_c$ ist für konstante Winkelgeschwindigkeit $\sim x$:
 $\rightarrow$ am Pol ist $x = 0$, am Äquator ist x maximal

Quelle: Lowrie, 2007

Schwere

Zusammensetzung des Schwerevektors $\mathbf{g}$ aus Addition der Zentrifugalbeschleunigung (hier $\mathbf{z}$ und der Gravitationsbeschleunigung (hier $\mathbf{b}$)



Quelle: Lowrie, 2007

Schwere

Schwere-Werte:

$$\text{An den Polen} : g_{\text{pol}} = 983,221 \text{ gal}$$

$$\text{Am Äquator} : g_{\text{äqu}} = 978,049 \text{ gal}$$

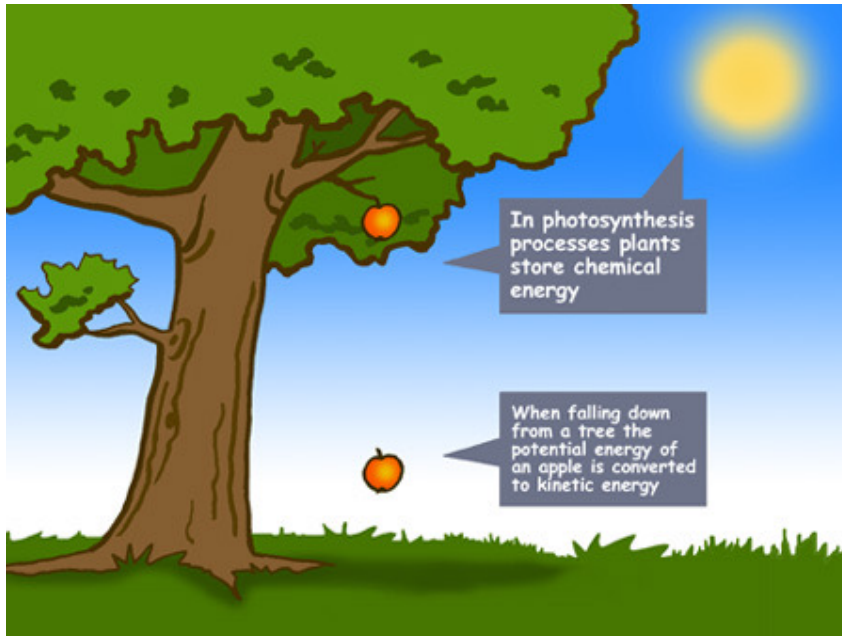
$$g_{\text{pol}} - g_{\text{äqu}} = 5,172 \text{ gal}$$

Einheiten: $1 \text{ cm/s}^2 = 0,01 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ gal} = 1000 \text{ mgal}$ (cgs-Einheit, benannt nach Galileo Galilei)

Quelle: Wenzel

Gravitationspotential

Betrachtung der Potentiale

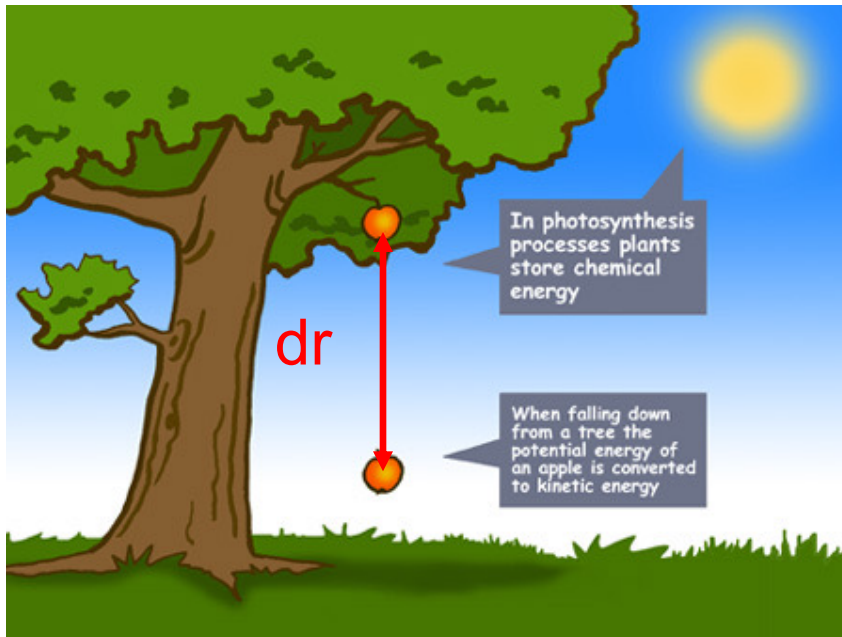


$$dE_p = -dW = -Fdr$$

Quelle: Uni Helsinki

Gravitationspotential

Betrachtung der Potentiale



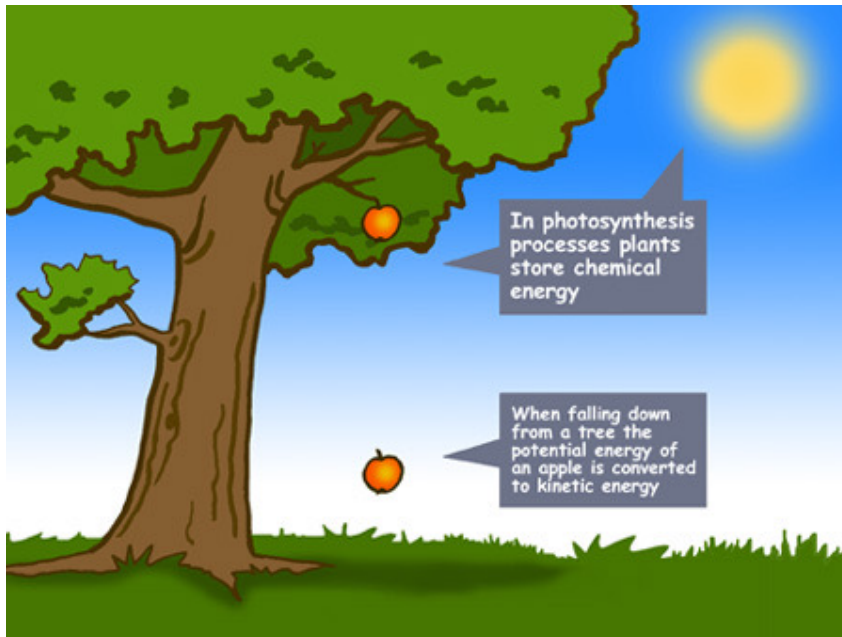
$$dE_p = -dW = -Fdr$$

Um eine kleine Änderung der potentiellen Energie E_p hervorzurufen („Apfel zurück auf Baum“), muss kleine Arbeit dW geleistet werden, zum Beispiel in Form einer Kraftausübung F entlang eines kleinen Wegs dr

Quelle: Uni Helsinki

Gravitationspotential

Betrachtung der Potentiale



$$dE_p = -dW = -Fdr$$

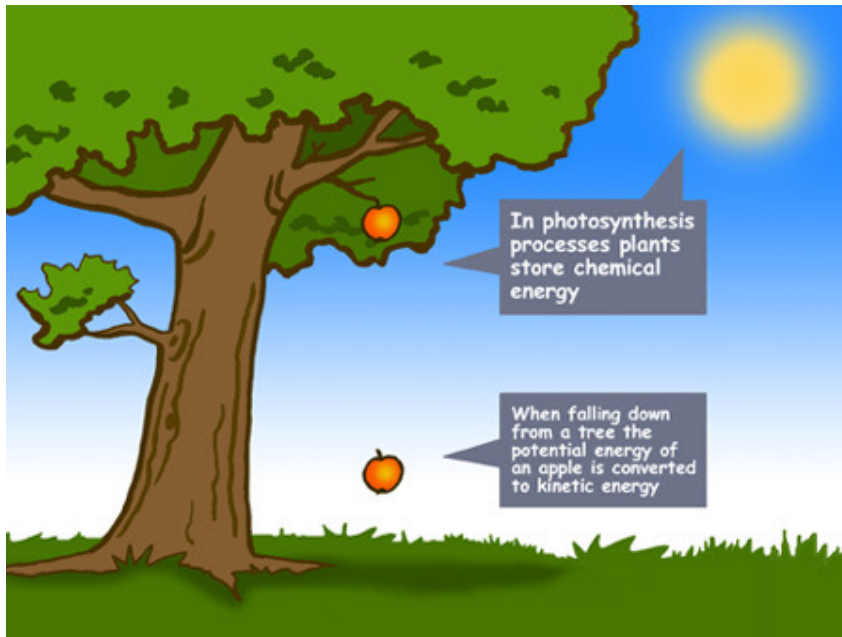
$$E_p = m U_G$$

Die Energie E_p , die erforderlich ist, lässt sich durch das Potential U_G der Masse m ausdrücken („die Masse hat anschließend eine andere potentielle Energie“)

Quelle: Uni Helsinki

Gravitationspotential

Betrachtung der Potentiale



$$dE_p = -dW = -Fdr$$

$$E_p = m U_G$$

Einsetzen führt zu:

$$m dU_G = F dr = -ma_G dr$$

Quelle: Uni Helsinki

Gravitationspotential

Daraus folgt der Zusammenhang:

$$\mathbf{a}_G = - \frac{dU_G}{dr} \hat{\mathbf{r}}$$

Gravitationspotential

Gravitationsbeschleunigung

Quelle: Lowrie, 2007

Gravitationspotential

Daraus folgt der Zusammenhang:

$$\mathbf{a}_G = - \frac{dU_G}{dr} \hat{\mathbf{r}}$$

Gravitationspotential

Gravitationsbeschleunigung

In kartesische Komponenten zerlegt:

$$a_x = - \frac{\partial U_G}{\partial x} \quad a_y = - \frac{\partial U_G}{\partial y} \quad a_z = - \frac{\partial U_G}{\partial z}$$

Quelle: Lowrie, 2007

Gravitationspotential

Und mit dem Gravitationsgesetz lässt sich das Gravitationspotential einer Punktmasse schreiben als

$$U_G = -G \frac{M}{r}$$

Quelle: Lowrie, 2007

Gravitationspotential

Ausgedehnte Masse:

$$U_G = -G \frac{m_1}{r_1} - G \frac{m_2}{r_2} - G \frac{m_3}{r_3} - \dots$$

Quelle: Lowrie, 2007

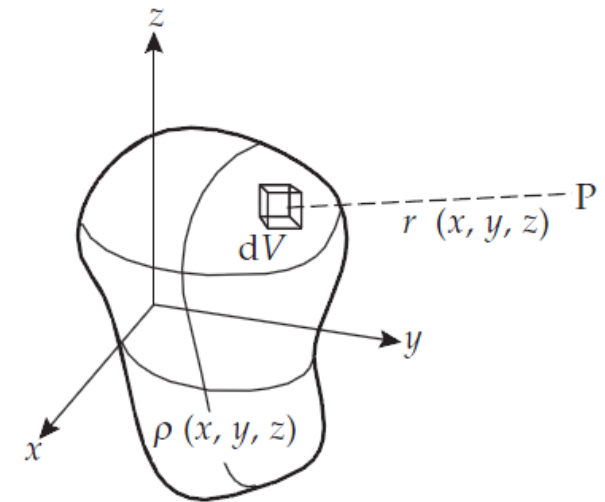
Gravitationspotential

Ausgedehnte Masse:

$$U_G = -G \frac{m_1}{r_1} - G \frac{m_2}{r_2} - G \frac{m_3}{r_3} - \dots$$

Für einen Punkt P in Entfernung r vom ausgedehnten Körper gilt:

$$U_G = -G \int_x \int_y \int_z \frac{\rho(x,y,z)}{r(x,y,z)} dx dy dz$$



Quelle: Lowrie, 2007

Gravitationspotential

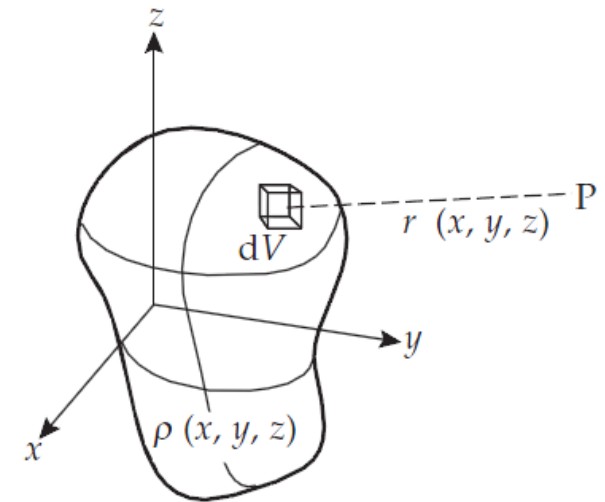
Ausgedehnte Masse:

$$U_G = -G \frac{m_1}{r_1} - G \frac{m_2}{r_2} - G \frac{m_3}{r_3} - \dots$$

Für einen Punkt P in Entfernung r vom ausgedehnten Körper gilt:

$$U_G = -G \int \int \int \frac{\rho(x, y, z)}{r(x, y, z)} dx dy dz$$

ortsabhängige (!) Dichte des Körpers



Quelle: Lowrie, 2007

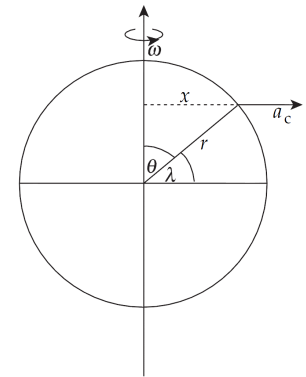
Zentrifugalpotential

Glücklicherweise lässt sich auch für die Zentrifugalbeschleunigung ein Potential finden:

$$\mathbf{a}_c = -\frac{\partial U_c}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} = (\omega^2 x) \hat{\mathbf{x}}$$

Integration ergibt

$$U_c = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \lambda = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$



Quelle: Lowrie, 2007

Schwerepotential U_{Gesamt}

Vorteil: Potentiale lassen sich skalar addieren

$$\begin{aligned} U_{\text{Gesamt}} &= U_G + U_C \\ &= -G \frac{M}{r} - \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \end{aligned}$$

Quelle: Lowrie, 2007

Schweremessungen

Größenordnungen – erforderliche Messgenauigkeit:

- Betrag des Schwerevektors variiert global zwischen 987 gal und 983,3 gal (etwa 5%) → Genauigkeit von einigen mgal ist ausreichend für globale Untersuchungen

Quelle: Lowrie, 2007

Schweremessungen

Größenordnungen – erforderliche Messgenauigkeit:

- Betrag des Schwerevektors variiert global zwischen 987 gal und 983,3 gal (etwa 5%) → Genauigkeit von einigen mgal ist ausreichend für globale Untersuchungen
- Untersuchung auf regionaler Skala, z. B. Rheingraben und Alpen: Messgenauigkeit 0,1 – 1 mgal

Quelle: Lowrie, 2007

Schweremessungen

Größenordnungen – erforderliche Messgenauigkeit:

- Betrag des Schwerevektors variiert global zwischen 987 gal und 983,3 gal (etwa 5%) → Genauigkeit von einigen mgal ist ausreichend für globale Untersuchungen
- Untersuchung auf regionaler Skala, z. B. Rheingraben und Alpen: Messgenauigkeit 0,1 – 1 mgal
- Kleinräumige Untersuchungen wie z. B. Salzstöcke, andere Lagerstätten oder tektonische Störungen: 0,01 mgal

Quelle: Lowrie, 2007

Schweremessungen

Größenordnungen – erforderliche Messgenauigkeit:

- Betrag des Schwerevektors variiert global zwischen 987 gal und 983,3 gal (etwa 5%) → Genauigkeit von einigen mgal ist ausreichend für globale Untersuchungen
- Untersuchung auf regionaler Skala, z. B. Rheingraben und Alpen: Messgenauigkeit 0,1 – 1 mgal
- Kleinräumige Untersuchungen wie z. B. Salzstöcke, andere Lagerstätten oder tektonische Störungen: 0,01 mgal
- Untersuchung zeitlicher Variationen: 0,001 mgal

Quelle: Lowrie, 2007

Schweremessungen

Größenordnungen – erforderliche Messgenauigkeit:

- Betrag des Schwerevektors variiert global zwischen 987 gal und 983,3 gal (etwa 5%) → Genauigkeit von einigen mgal ist ausreichend für globale Untersuchungen
- Untersuchung auf regionaler Skala, z. B. Rheingraben und Alpen: Messgenauigkeit 0,1 – 1 mgal
- Kleinräumige Untersuchungen wie z. B. Salzstöcke, andere Lagerstätten oder tektonische Störungen: 0,01 mgal
- Untersuchung zeitlicher Variationen: 0,001 mgal

Aus Vorlesung Einführung in die Geophysik 1:

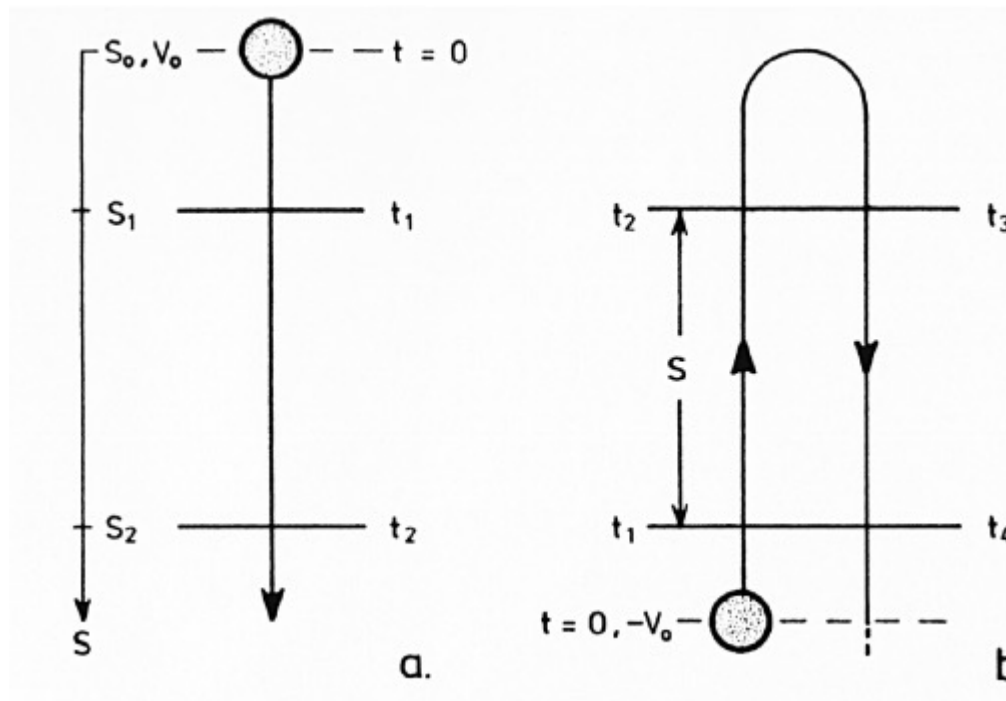
Messwerte müssen reduziert werden, d.h. Einflussfaktoren geographischer Breite, von großräumigen Gebirgen und Tälern etc. entfernt werden, um lokale Anomalie zu erhalten.

Quelle: Lowrie, 2007

Schweremessungen - Absolutmessungen

Neuere Absolutmessungen von g beruhen auf dem freien Fall eines Objektivs:

- a) Freifall-Methode,
- b) Freiwurf- und Freifall-Methode

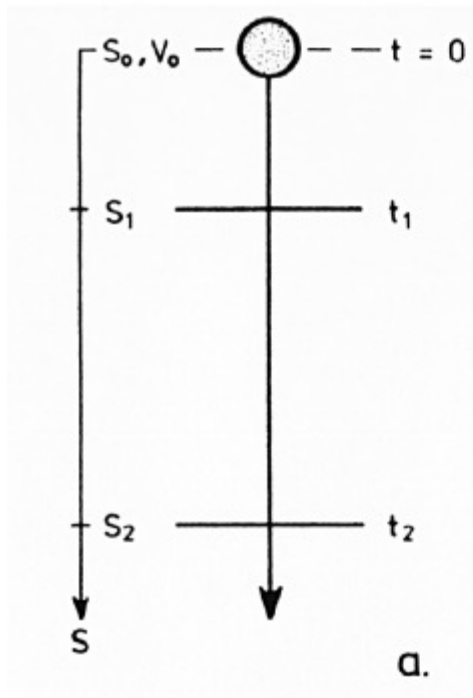


Quelle: Wenzel

Schweremessungen - Absolutmessungen

Neuere Absolutmessungen von g beruhen auf dem freien Fall eines Objekts:

- a) Freifall-Methode,
- b) Freiwurf- und Freifall-Methode



Für die beim freien Fall in der Zeit t_i zurückgelegte Strecke s_i gilt:

$$s_i = \frac{1}{2}gt_i^2$$

Hieraus folgt direkt:

$$g = 2 \cdot \frac{s_2 - s_1}{t_2^2 - t_1^2}$$

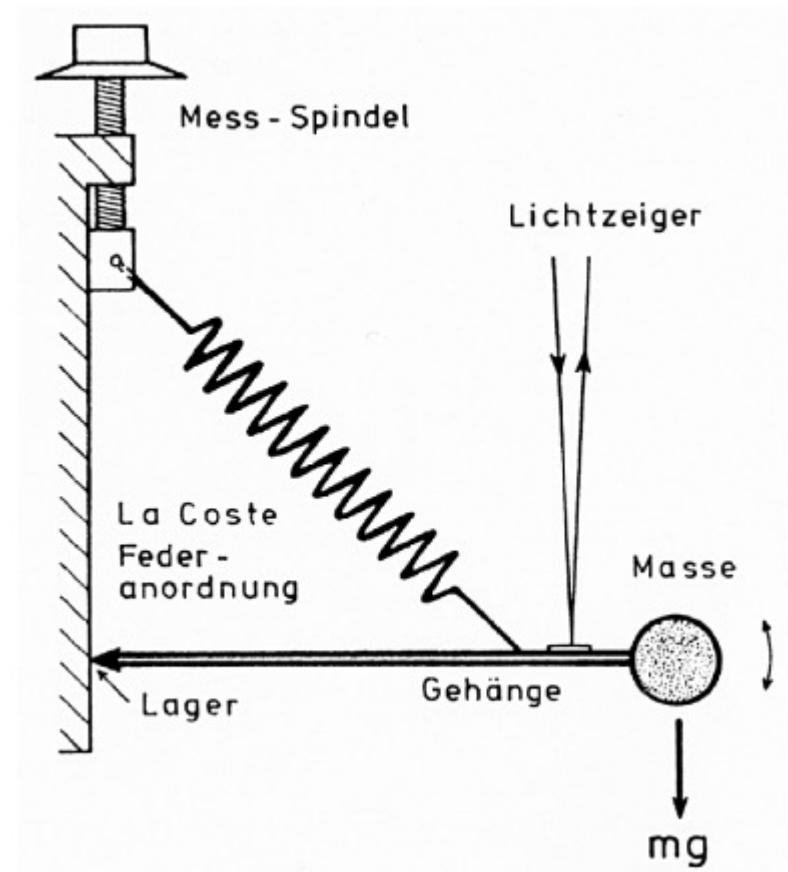
Neu: Quantengravimeter!

Quelle: Wenzel

Schweremessungen - Relativmessungen

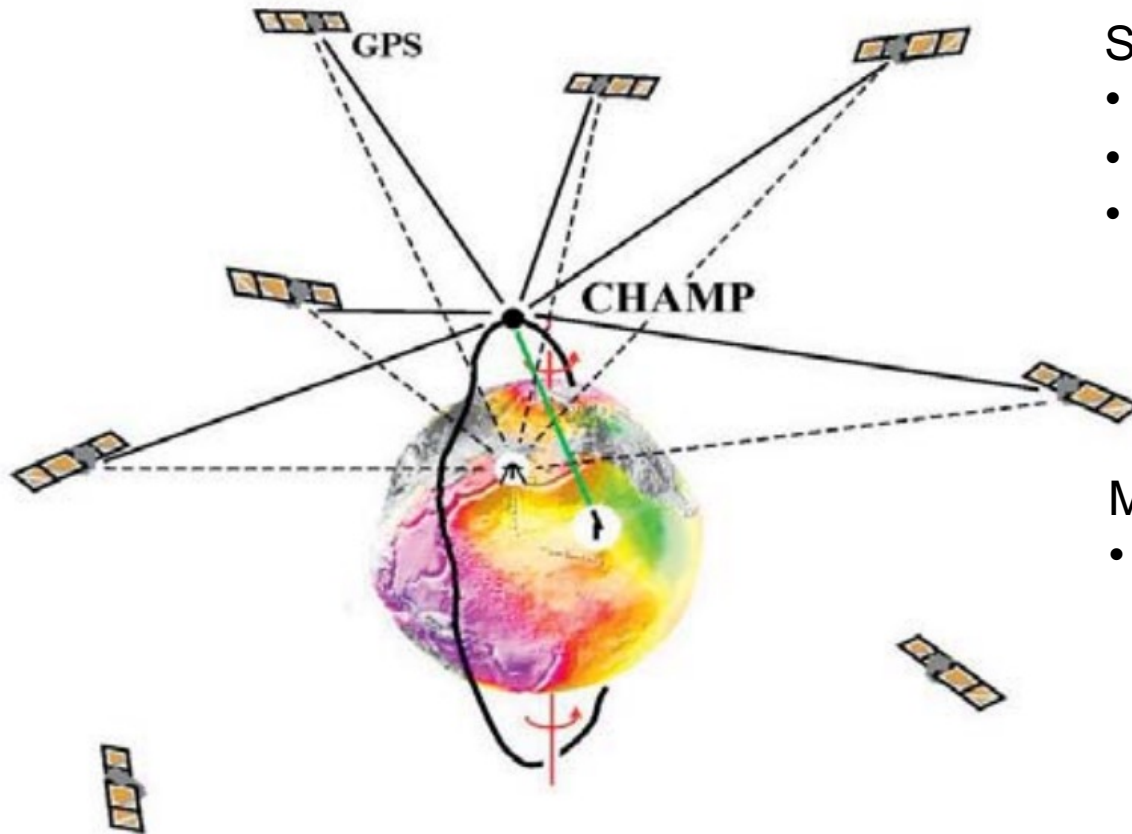
Messung von Schweredifferenzen erfordert weniger Aufwand und ist etwa um zwei Größenordnungen genauer!

Prinzip eines Gravimeters (Federwaage):



Quelle: Wenzel

Schweremessungen - Satellitenmessungen



Satellit CHAMP

- Einsatzzeit: 2000 – 2010
- Überflughöhe 450 km
- ca. 15 Erdumläufe pro 24 h

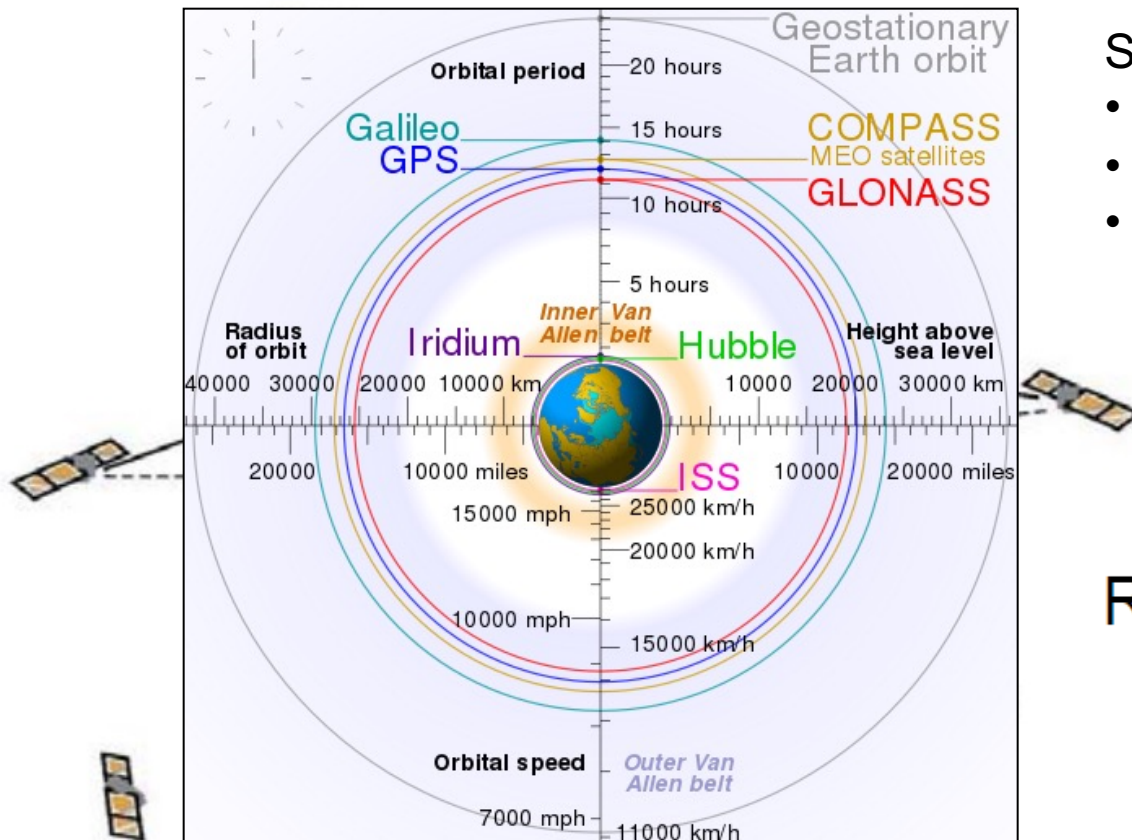
Messidee

- Bahnschwankungen des Satelliten wird durch bodengestützte und satellitenbasierte GPS-Systeme überwacht

Abb. 2: Prinzip der Ausmessung der Bahn des Satelliten CHAMP mit den Signalen der GPS-Satelliten und mit bodengestütztem Laserradar.

Quelle: Foerste, 2010

Schweremessungen - Satellitenmessungen



Satellit CHAMP

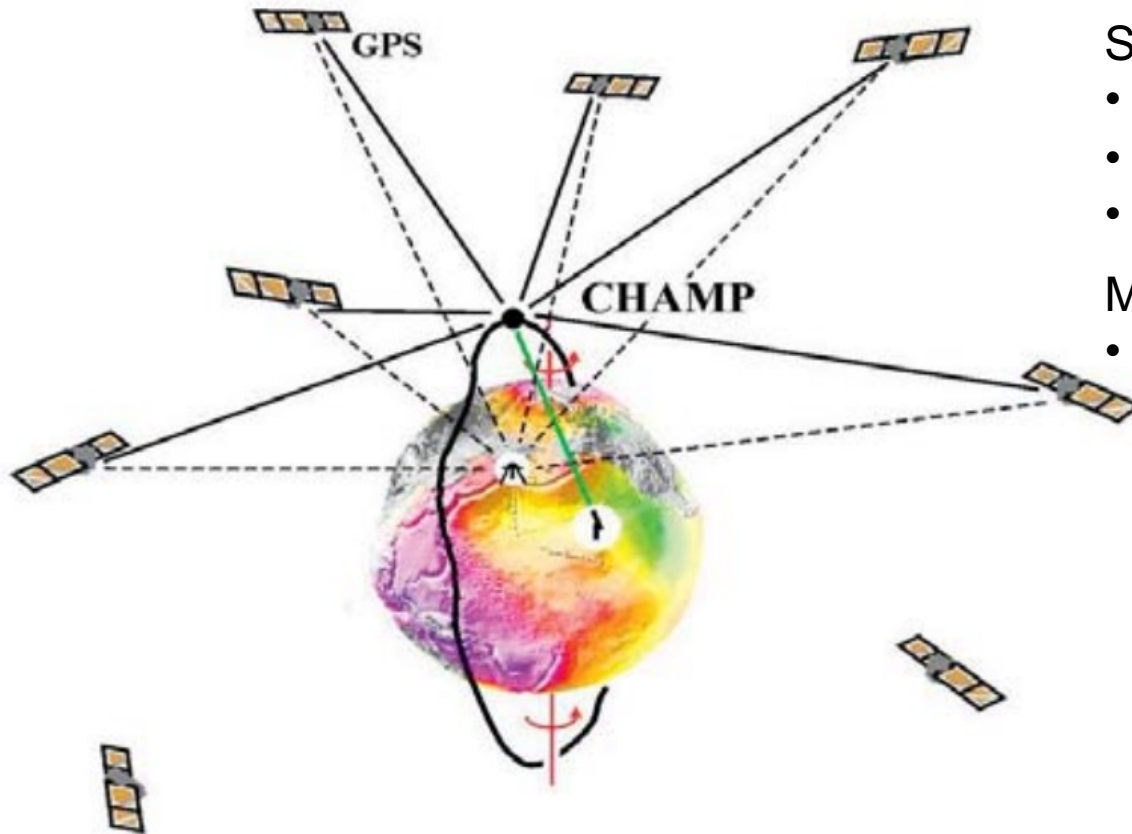
- Einsatzzeit: 2000 – 2010
- Überflughöhe 450 km
- ca. 15 Erdumläufe pro 24 h

$$R = (G M_E \cdot T^2 / 4 \pi^2)^{1/3}$$

Abb. 2: Prinzip der Ausmessung der Bahn des Satelliten CHAMP mit den Signalen der GPS-Satelliten und mit bodengestütztem Laserradar.

Quelle: Foerste, 2010

Schweremessungen - Satellitenmessungen



Satellit CHAMP

- Einsatzzeit: 2000 – 2010
- Überflughöhe 450 km
- ca. 15 Erdumläufe pro 24 h

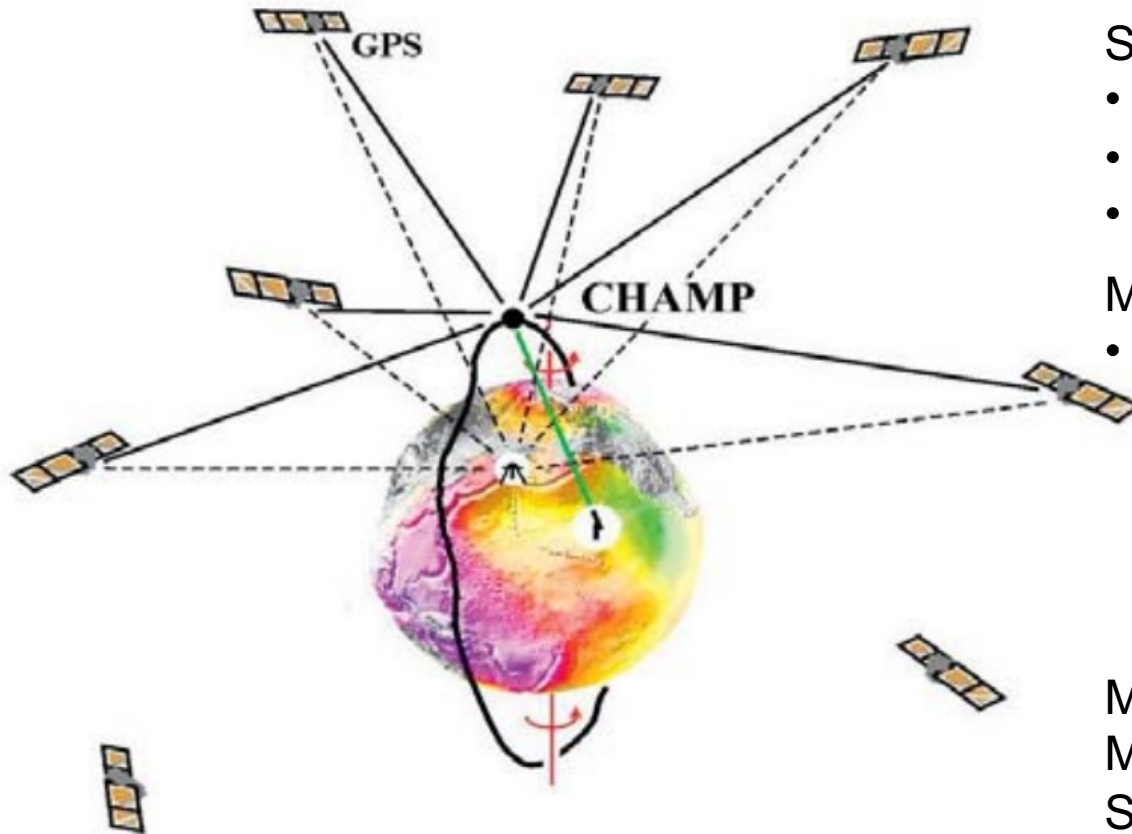
Messidee

- Bahnschwankungen des Satelliten wird durch bodengestützte und satellitenbasierte GPS-Systeme überwacht

Abb. 2: Prinzip der Ausmessung der Bahn des Satelliten CHAMP mit den Signalen der GPS-Satelliten und mit bodengestütztem Laserradar.

Quelle: Foerste, 2010

Schweremessungen - Satellitenmessungen



Satellit CHAMP

- Einsatzzeit: 2000 – 2010
- Überflughöhe 450 km
- ca. 15 Erdumläufe pro 24 h

Messidee

- Bahnschwankungen des Satelliten wird durch bodengestützte und satellitenbasierte GPS-Systeme überwacht

Messsensor im schwerelosen Massenschwerpunkt des Satelliten angebracht

Abb. 2: Prinzip der Ausmessung der Bahn des Satelliten CHAMP mit den Signalen der GPS-Satelliten und mit bodengestütztem Laserradar.

Quelle: Foerste, 2010

Schweremessungen - Satellitenmessungen

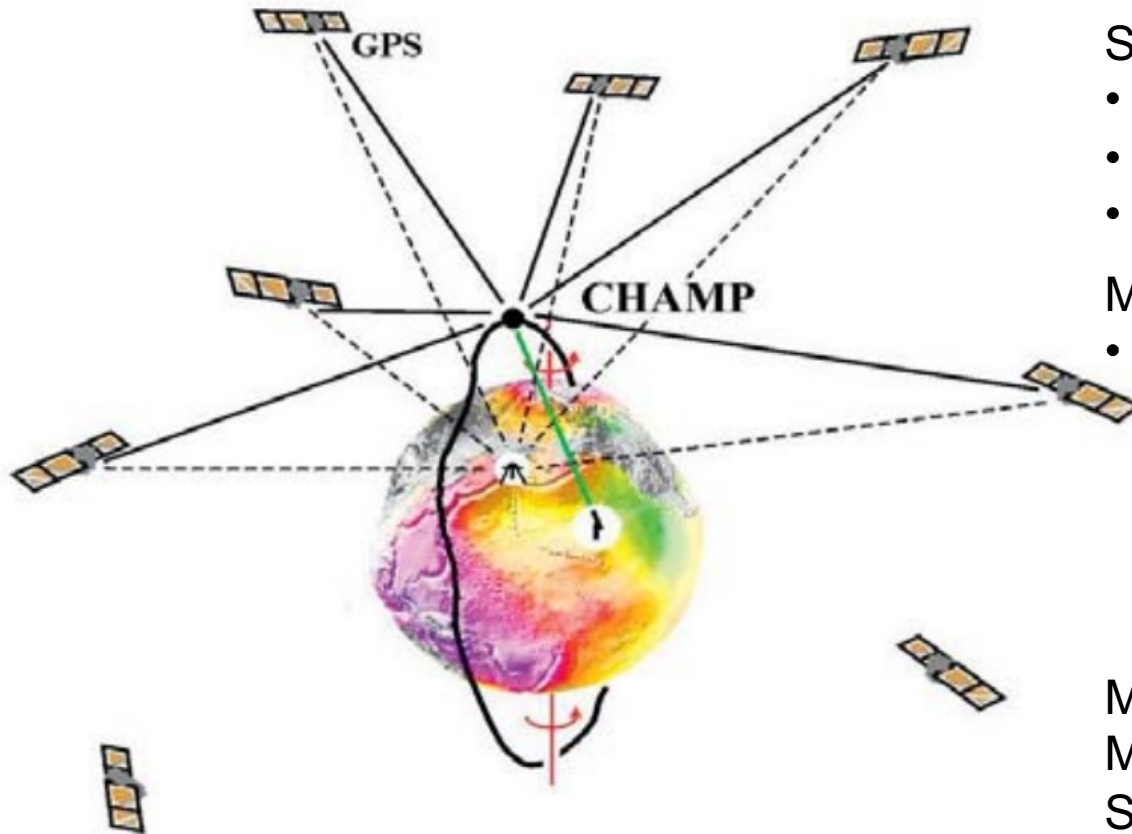


Abb. 2: Prinzip der Ausmessung der Bahn des Satelliten CHAMP mit den Signalen der GPS-Satelliten und mit bodengestütztem Laserradar.

Quelle: Foerste, 2010

Satellit CHAMP

- Einsatzzeit: 2000 – 2010
- Überflughöhe 450 km
- ca. 15 Erdumläufe pro 24 h

Messidee

- Bahnschwankungen des Satelliten wird durch bodengestützte und satellitenbasierte GPS-Systeme überwacht

Messsensor im schwerelosen Massenschwerpunkt des Satelliten angebracht

Störeinfluss durch niedrige Flughöhe, dort hohe Atmosphärenreibung

Schweremessungen - Satellitenmessungen

Satellitenpaar GRACE

- Einsatzzeit: seit 2002
- Überflughöhe 450 - 500 km
- ca. 15 Erdumläufe pro 24 h

Messidee:

Abstandsmessung zwischen zwei Satelliten, die bei Überflug über Gebirge unterschiedlich starke Beschleunigung / Abbremsung erfahren

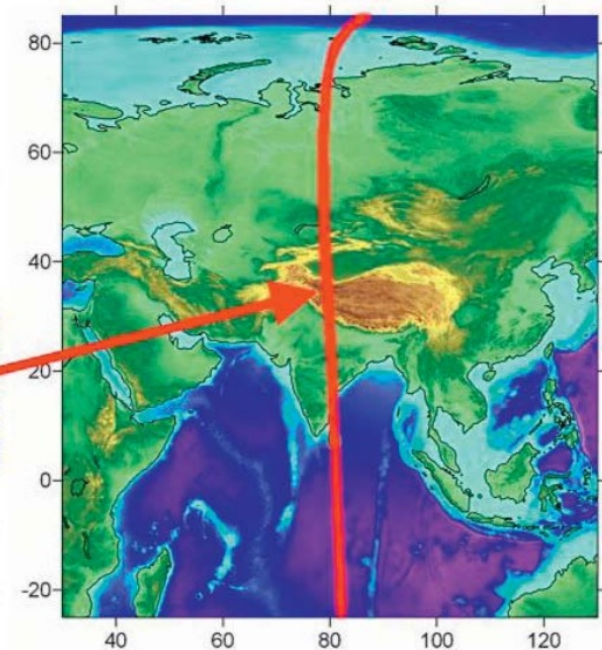
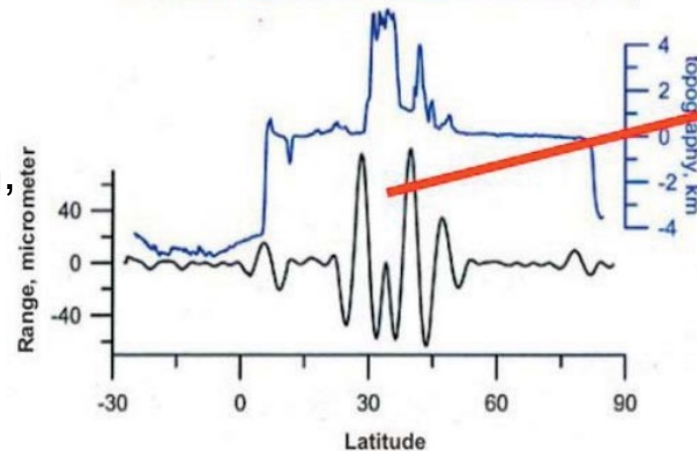


Abb. 3: Das GRACE-Satellitenpaar und das Prinzip der K-Band-Messung dieser Tandem-Satellitenmission

Quelle: Foerste, 2010

Schweremessungen - Satellitenmessungen

Satellit GOCE

- Einsatzzeit: 2009 - 2013
- Überflughöhe 250 km
- Bessere Auflösung als GRACE und CHAMP, aber durch stärkere Reibung stärkere Abbremsung, kürzere Laufzeit



**Abb. 4: Künstlerische Animation des Satelliten GOCE
(Quelle: ESA - AOES Medialab)**

Quelle: Foerste, 2010

Schweremessungen - Satellitenmessungen

Satellit GOCE

- Einsatzzeit: 2009 - 2013
- Überflughöhe 250 km
- Bessere Auflösung als GRACE und CHAMP, aber durch stärkere Reibung stärkere Abbremsung, kürzere Laufzeit

Messprinzip:

Keine

Bahnschwankungen, sondern direkte

Messung des Gradienten des Erdschwerefelds



Abb. 4: Künstlerische Animation des Satelliten GOCE (Quelle: ESA - AOES Medialab)

Quelle: Foerste, 2010

Schweremessungen - Satellitenmessungen

Daten des GRACE-Satellitenpaares

Kombination mit Bodendaten

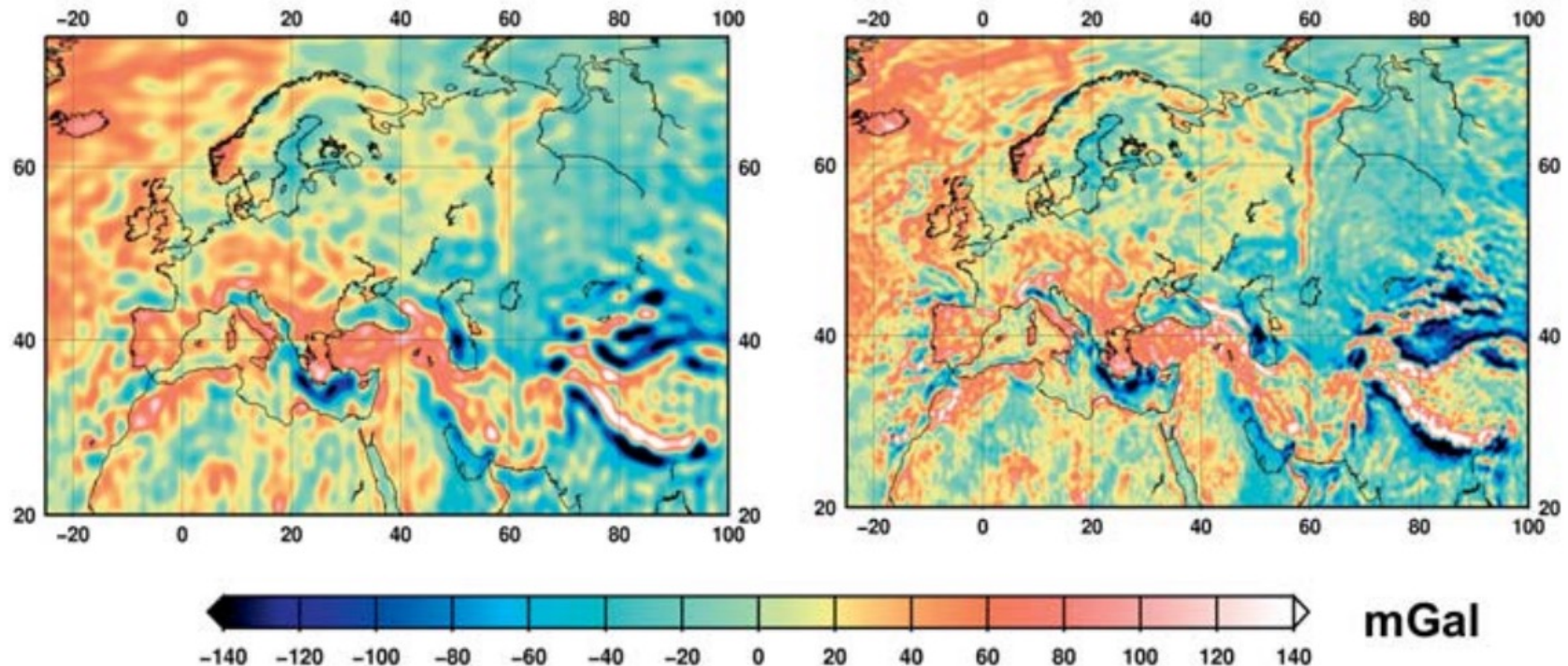


Abb. 5: Vergleich der räumlichen Auflösungen des Satelliten-Schwerefeldmodells EIGEN-5S (links) mit dem kombinierten Schwerefeldmodell EIGEN-5C (rechts) anhand der Schwereanomalien für Europa

Quelle: Foerste, 2010

Schweremessungen - Satellitenmessungen

Kurzwellige Schwerefeldanomalie: krustale Effekte, Gebirgsstrukturen

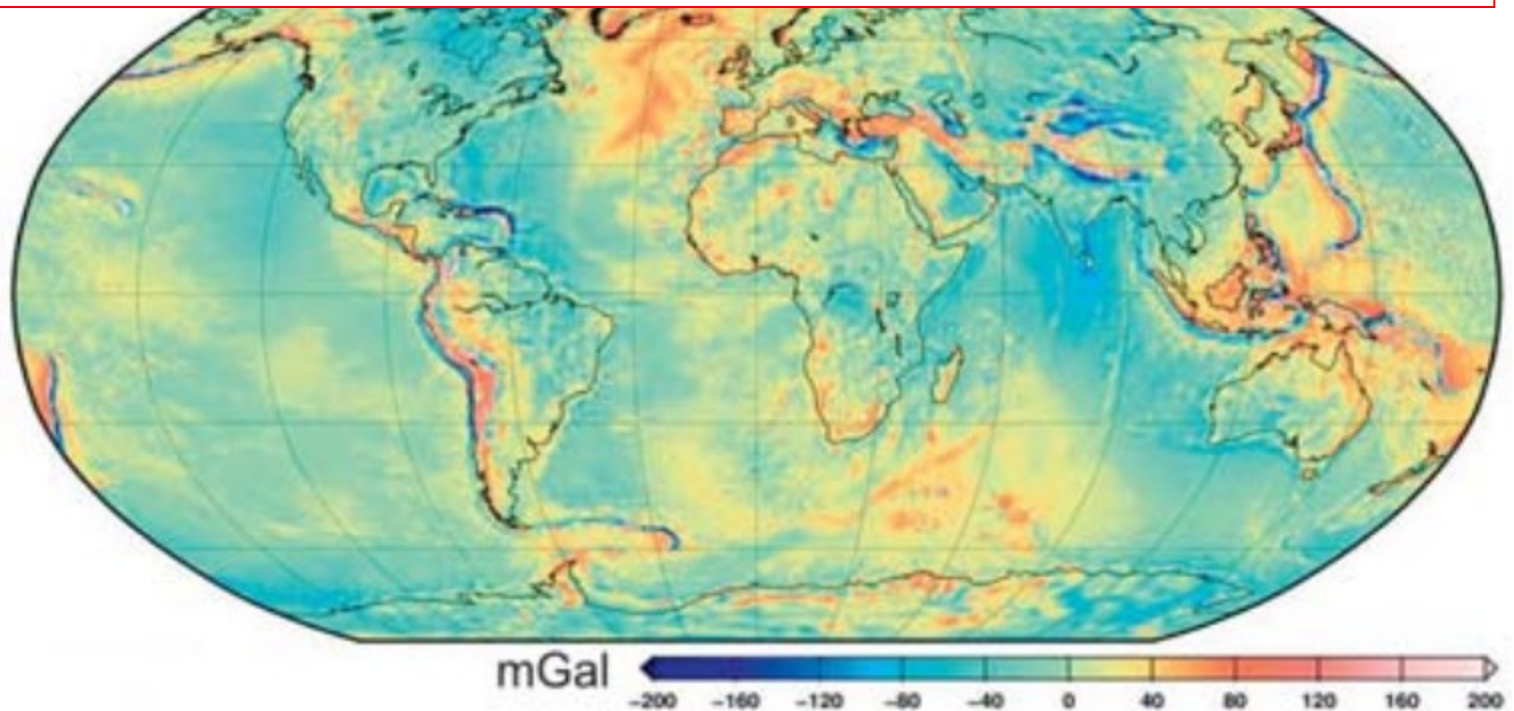


Abb. 6: Zweidimensionale Darstellungen des aktuellen Schwerefeldmodells EIGEN-5C des GFZ, als Schwereanomalien (Milligal).

Quelle: Foerste, 2010

Schweremessungen - Satellitenmessungen

Geoidundulation = Differenz von Ellipsoid und Geoid, Information über Strukturen im Erdinnern
Aufwölbung ist rot dargestellt

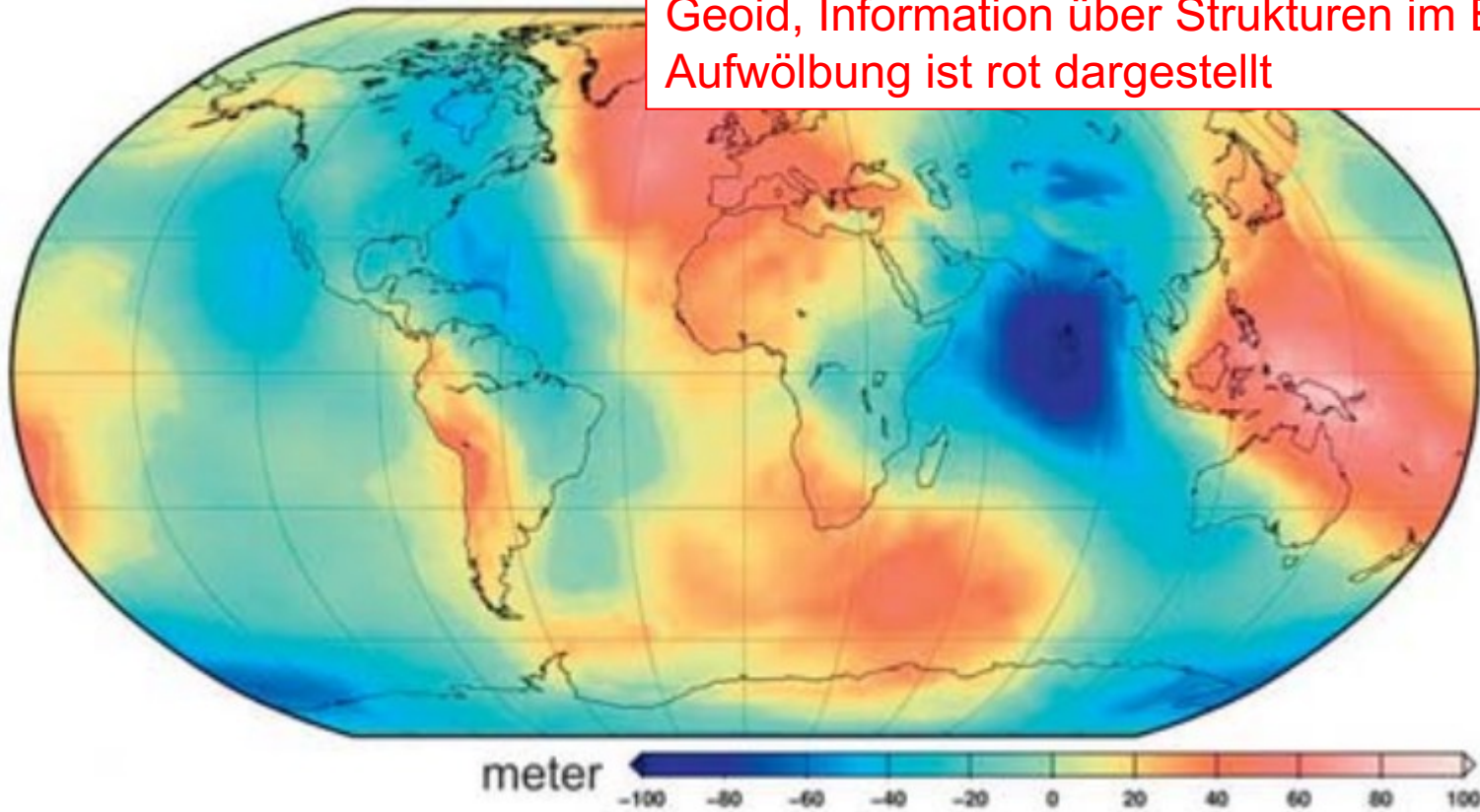


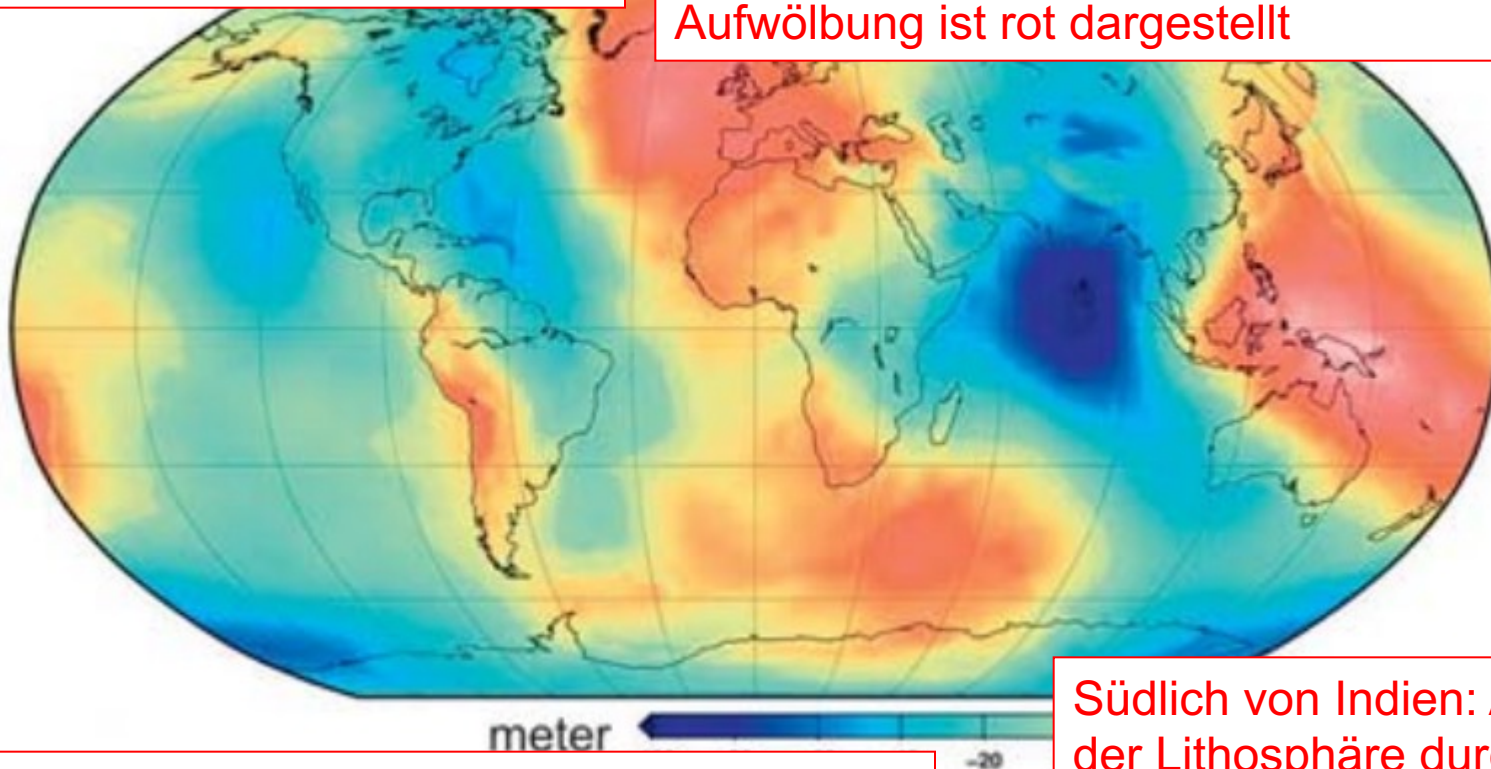
Abb. 6: Zweidimensionale Darstellungen des aktuellen Schwerefeldmodells EIGEN-5C des GFZ, als Geoidundulationen (Meter)

Quelle: Foerste, 2010

Schweremessungen - Satellitenmessungen

Kanadisches Tief (blau) durch ehemalige Vereisung

Geoidundulation = Differenz von Ellipsoid und Geoid, Information über Strukturen im Erdinnern
Aufwölbung ist rot dargestellt



Aufwölben an Subduktionszonen und in Gebieten starken Mantelkonvektion (MOR)

Südlich von Indien: Ausdünnung der Lithosphäre durch Nordwärtsbewegung der Platte

Geoidundulationen (Meter)

Quelle: Foerste, 2010

Schweremessungen - Satellitenmessungen

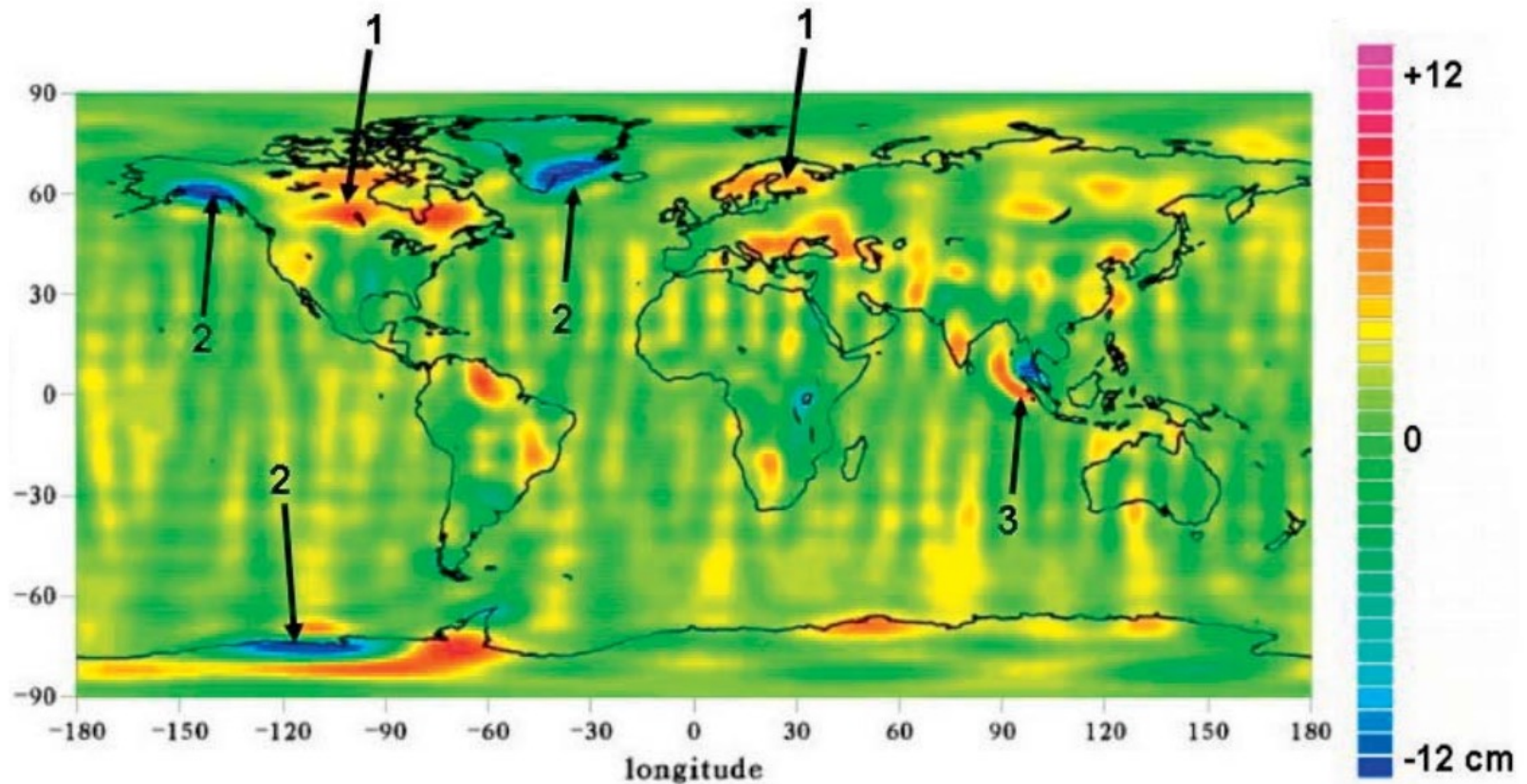


Abb. 8: Zeitliche Änderungen im Geoid zwischen 2002 und 2006, bestimmt aus GRACE-Beobachtungen, ausgedrückt als cm Wassersäulenäquivalent (Quelle: CNES/GRGS)

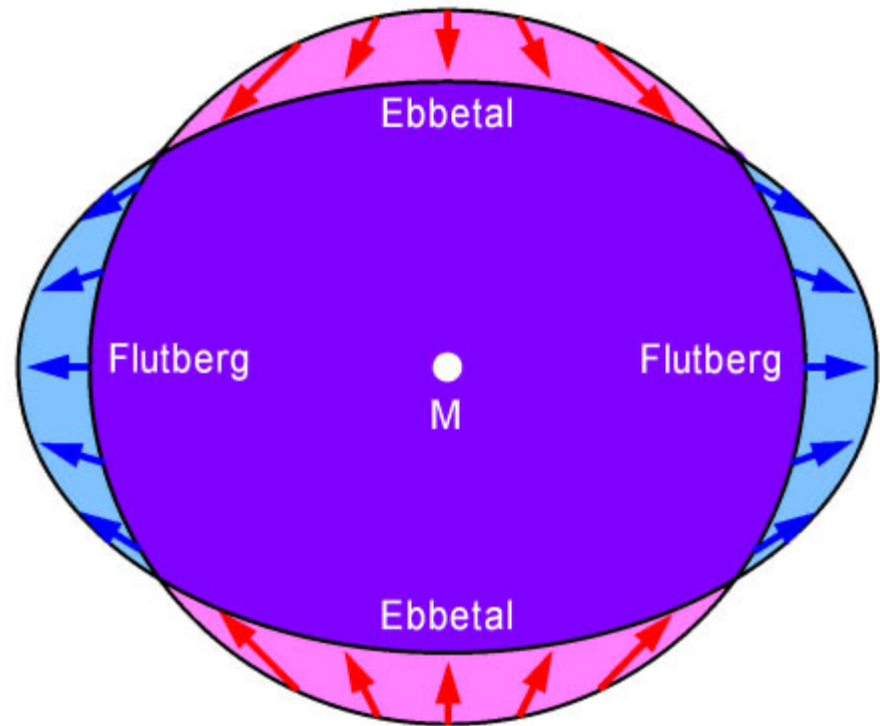
Quelle: Foerste, 2010

1= Landhebungen, 2 = Eismassenverluste, 3 = Sumatra-Beben

Gezeiten

Meeresgezeiten

Erdgezeiten: periodische Bewegungen der festen Erde

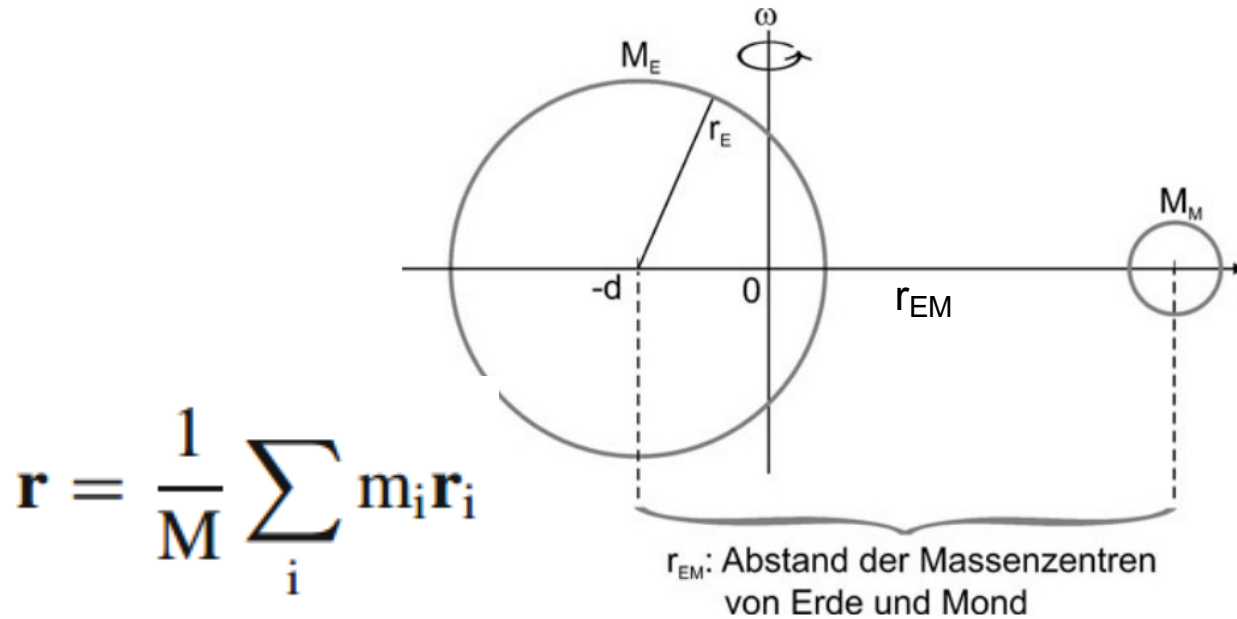


Gezeiten

Erde und Mond rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit ω um einen gemeinsamen Schwerpunkt. Die Lage des Schwerpunktes eines rotierenden Systems wird durch den Radiusvektor $\mathbf{r}$ angegeben:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i . \quad (4.23)$$

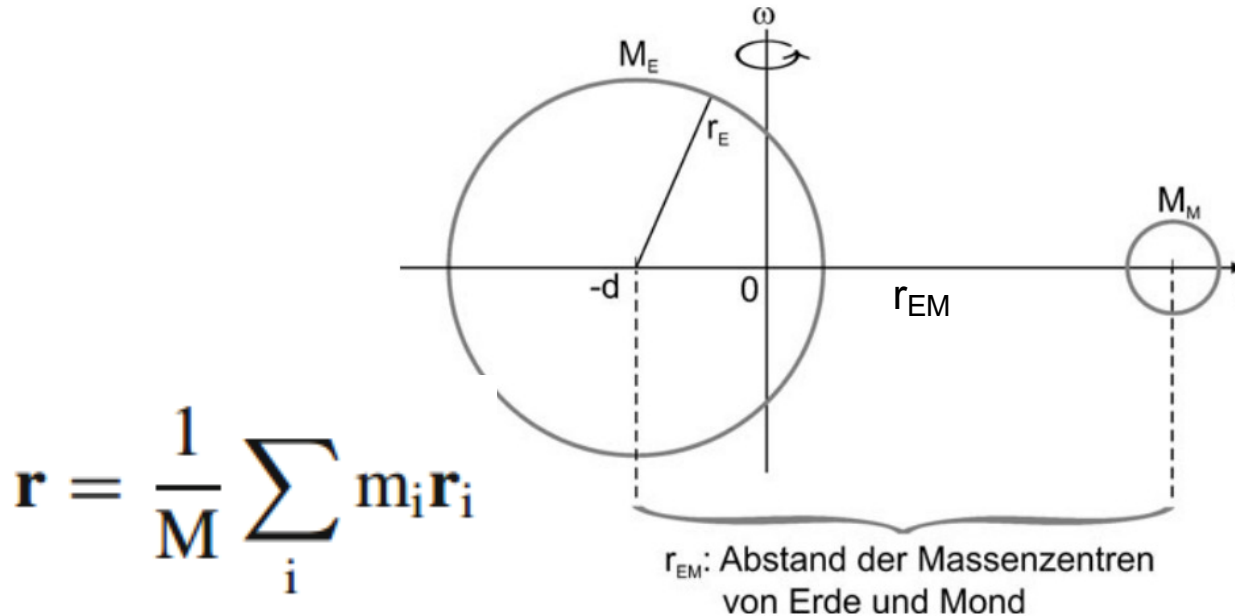
Gezeiten



Quelle: Clauser, 2015

Abb. 4.10 Umlauf von Erde und Mond um einen gemeinsamen Schwerpunkt

Gezeiten



Quelle: Clauser, 2015

Abb. 4.10 Umlauf von Erde und Mond um einen gemeinsamen Schwerpunkt

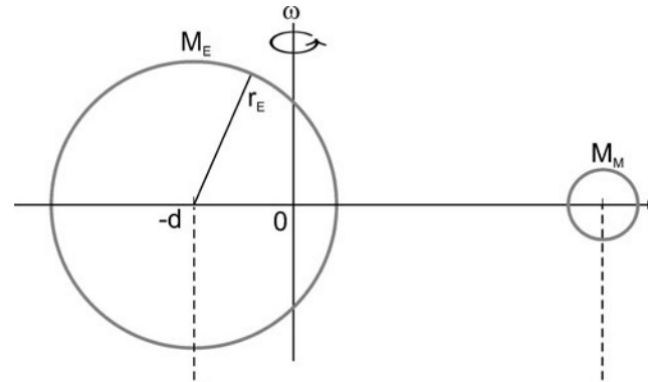
Abstand der Massenschwerpunkte von Erde und Mond

$$0 = r = (-M_E d + M_M (r_{EM} - d)) / (M_E + M_M)$$

Abstand von gemeinsamem Schwerpunkt zu Mittelpunkt der Erde

Gezeiten

$$d = r_{EM} \frac{M_M}{M_E + M_M}$$

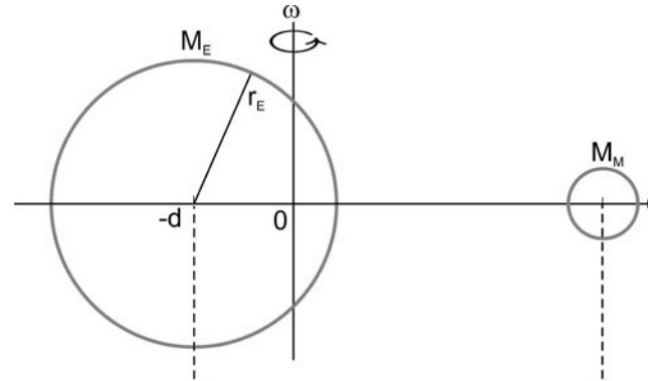


Die Masse des Mondes beträgt 1,23 % der Erdmasse, der Abstand zwischen Erd- und Mondmittelpunkt ist 382 000 km. Hieraus erhält man:

$$d = 382\,000 \text{ km} \frac{0,0123}{1,0123} \approx 4642 \text{ km} . \quad (4.25)$$

Gezeiten

$$d = r_{EM} \frac{M_M}{M_E + M_M}$$



Die Masse des Mondes beträgt 1,23 % der Erdmasse, der Abstand zwischen Erd- und Mondmittelpunkt ist 382 000 km. Hieraus erhält man:

$$d = 382\,000 \text{ km} \frac{0,0123}{1,0123} \approx 4642 \text{ km} . \quad (4.25)$$

Somit befindet sich der gemeinsame Schwerpunkt des rotierenden Systems Erde–Mond im unteren Erdmantel in etwa 1729 km Tiefe unter der Erdoberfläche.

Gezeiten

- Der Schwerpunkt des Systems läuft auf einer elliptischen Bahn (schwarze dicke Linie).
- Der Mittelpunkt der Erde „eiert“ darum mit kleiner Amplitude.
- Der Mittelpunkt des Mondes läuft auf einer Schlangenlinie größerer Amplitude

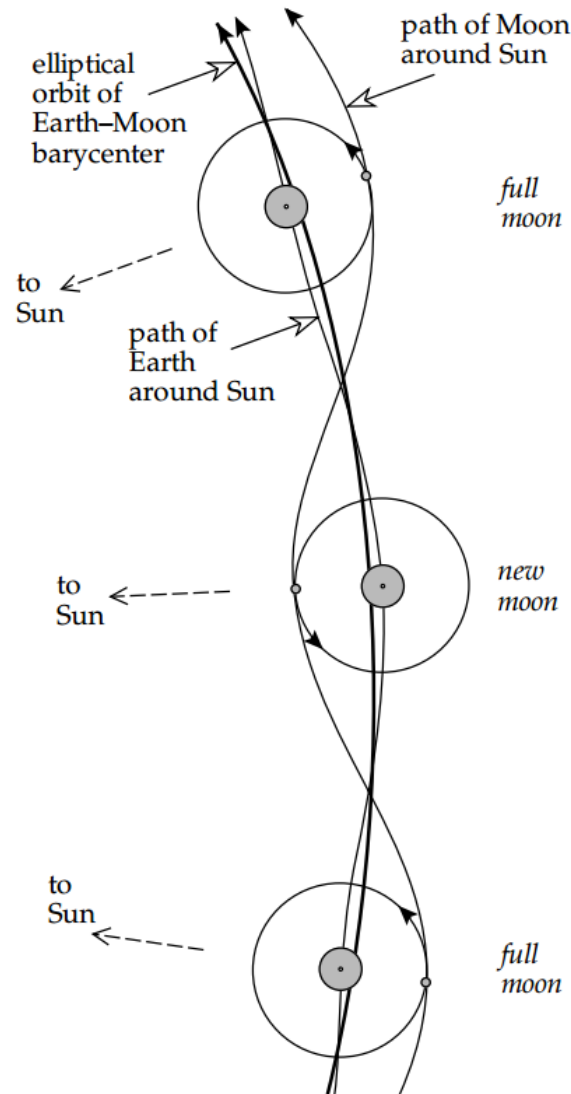


Fig. 2.9 Paths of the Earth and Moon, and their barycenter, around the Sun.

Gezeiten

- S: gemeinsamer Schwerpunkt des Systems Erde – Mond
- Äußere Bahn: Mondbahn
- Mittlerer Kreis: Erde mit vier Punkten 1 – 4 an ihrer Oberfläche
- Punkte 1 – 4 bewegen sich auf kleinen Kreisen

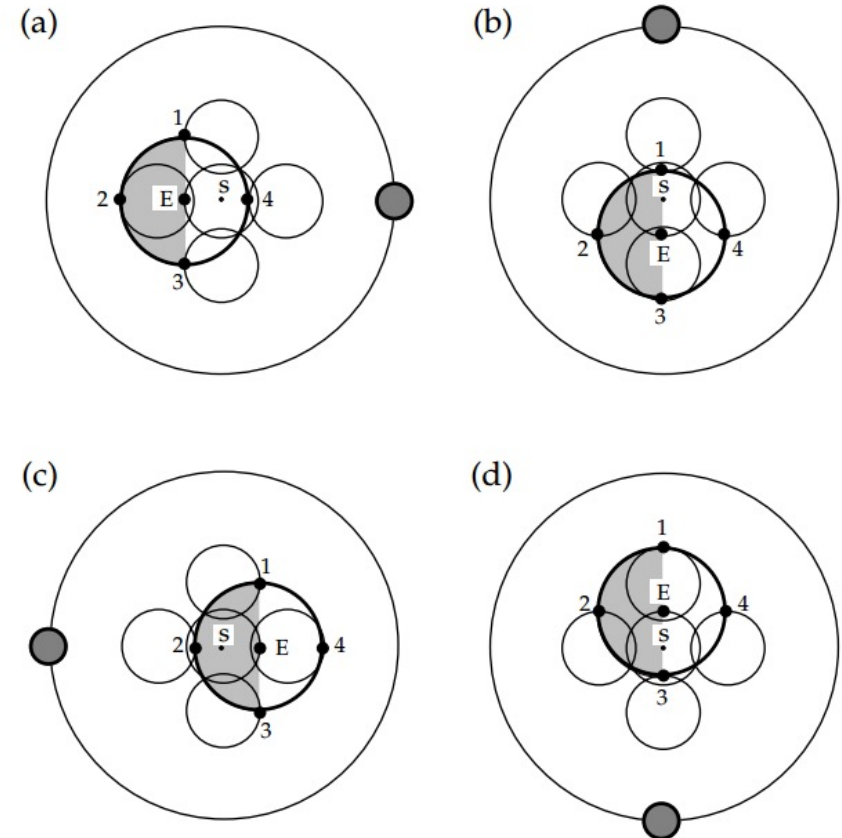


Fig. 2.10 Illustration of the “revolution without rotation” of the Earth–Moon pair about their common center of mass at S.

Quelle: Lowrie, 2007

Gezeiten

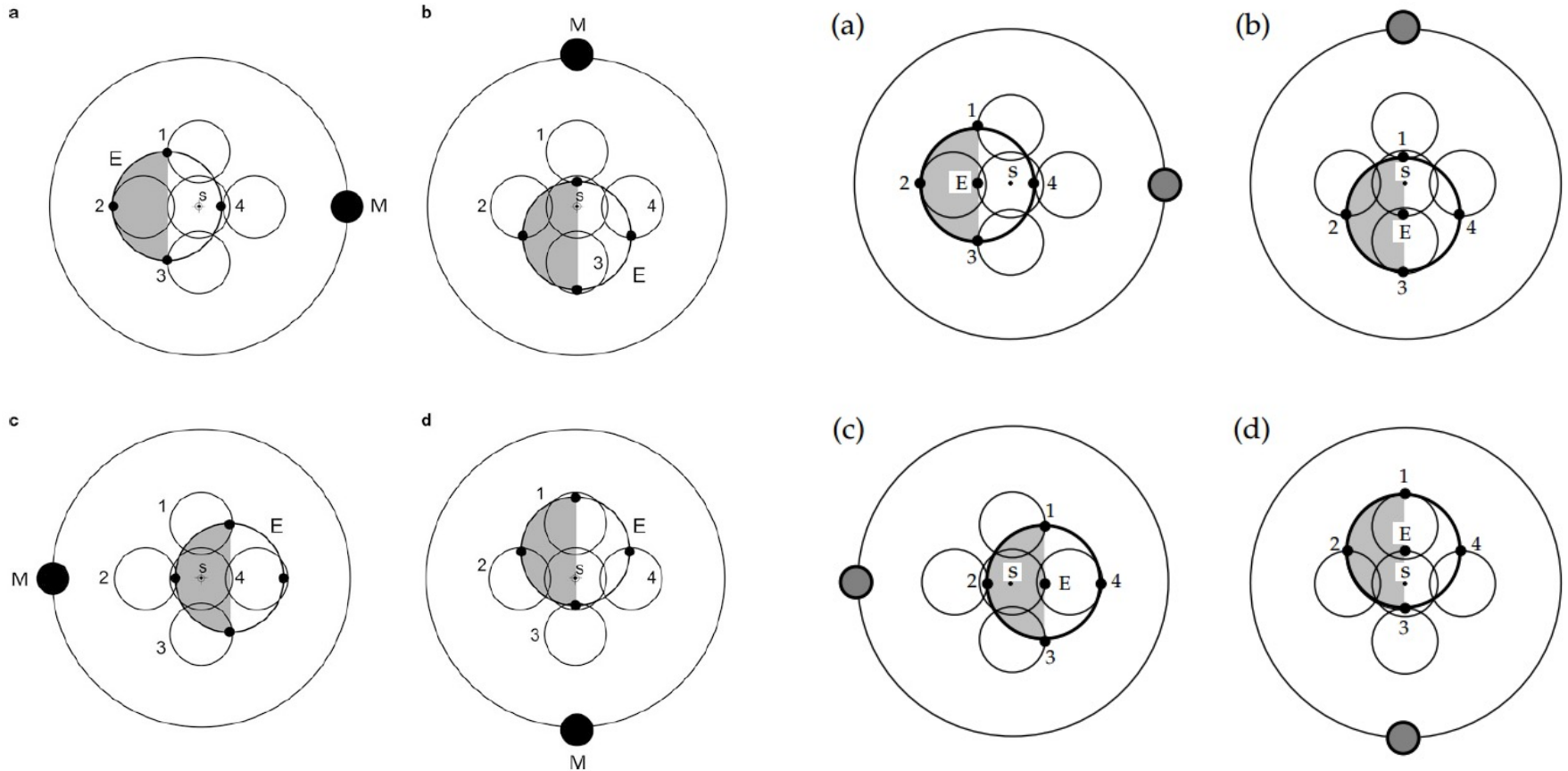


Fig. 2.10 Illustration of the "revolution without rotation" of the Earth–Moon pair about their common center of mass at S.

Quelle: Lowrie, 2007

Gezeiten

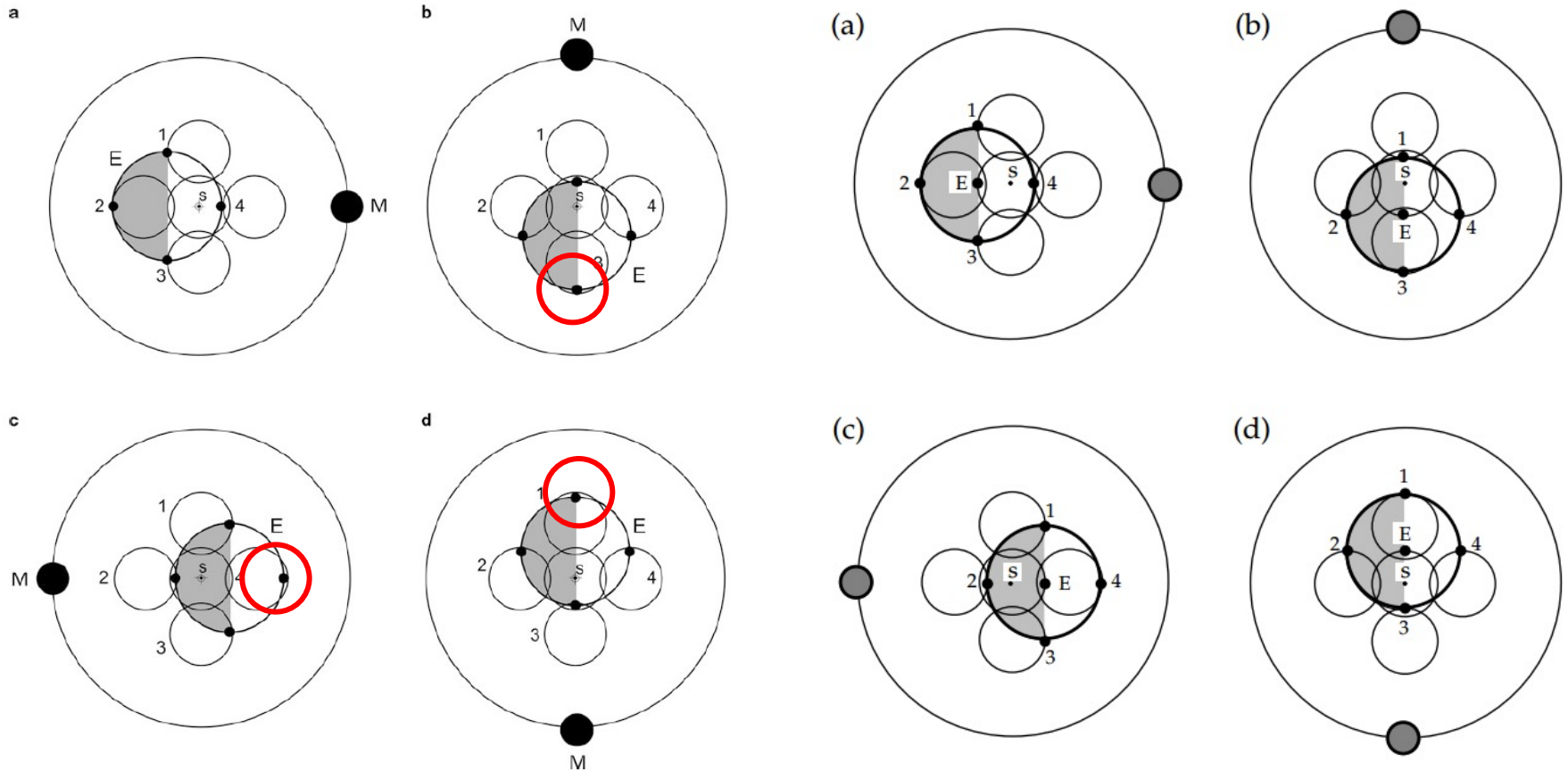
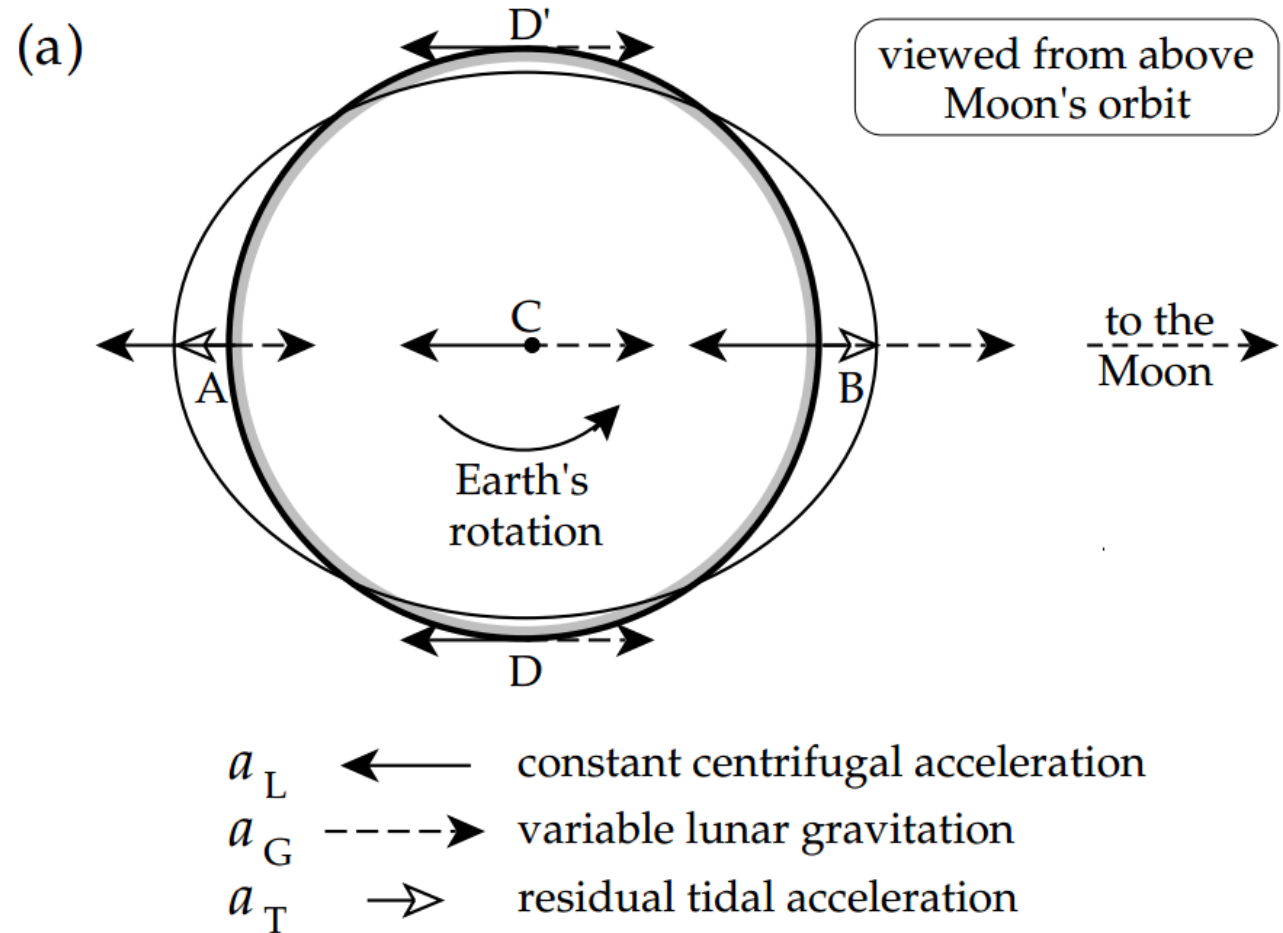
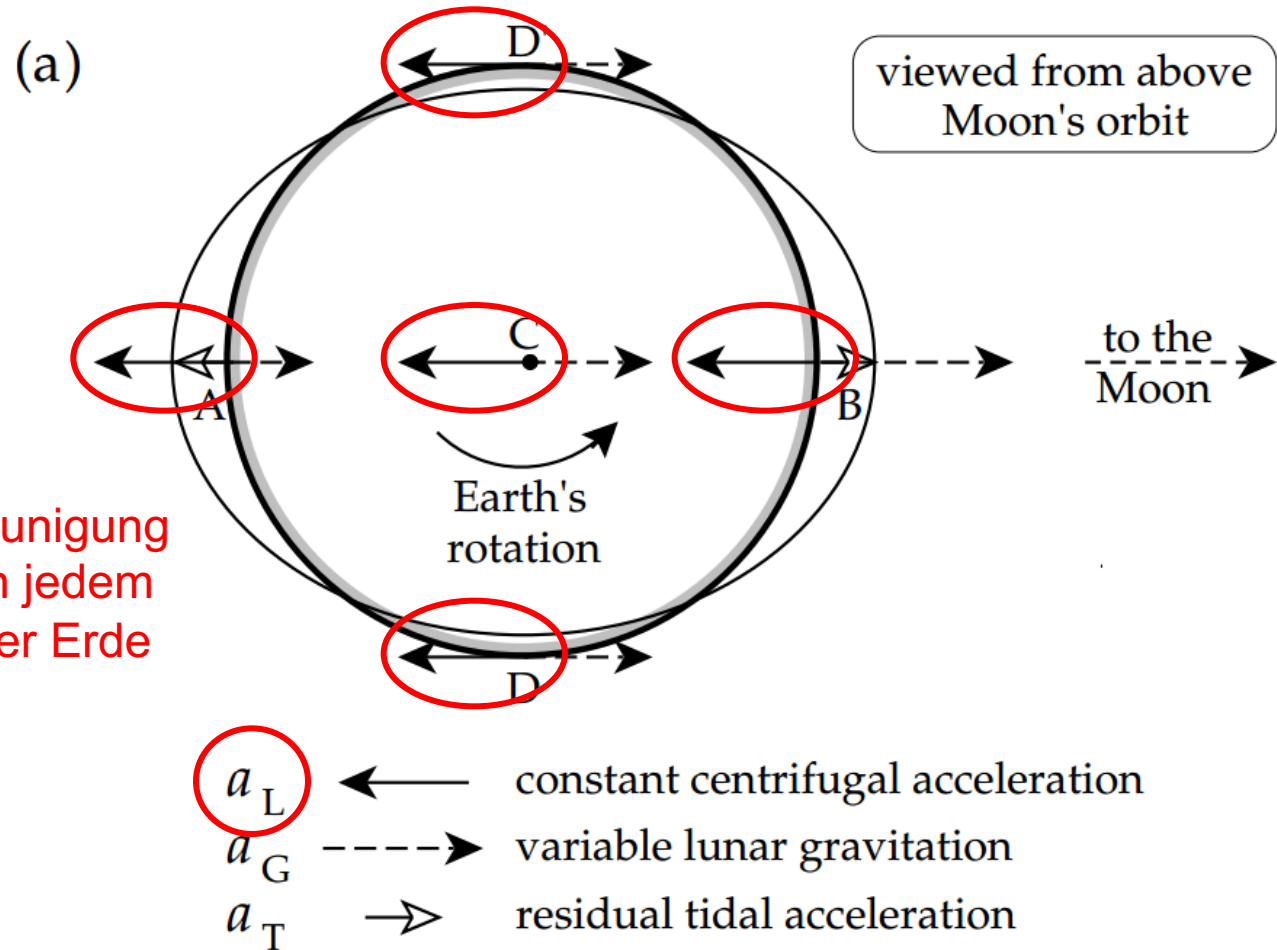


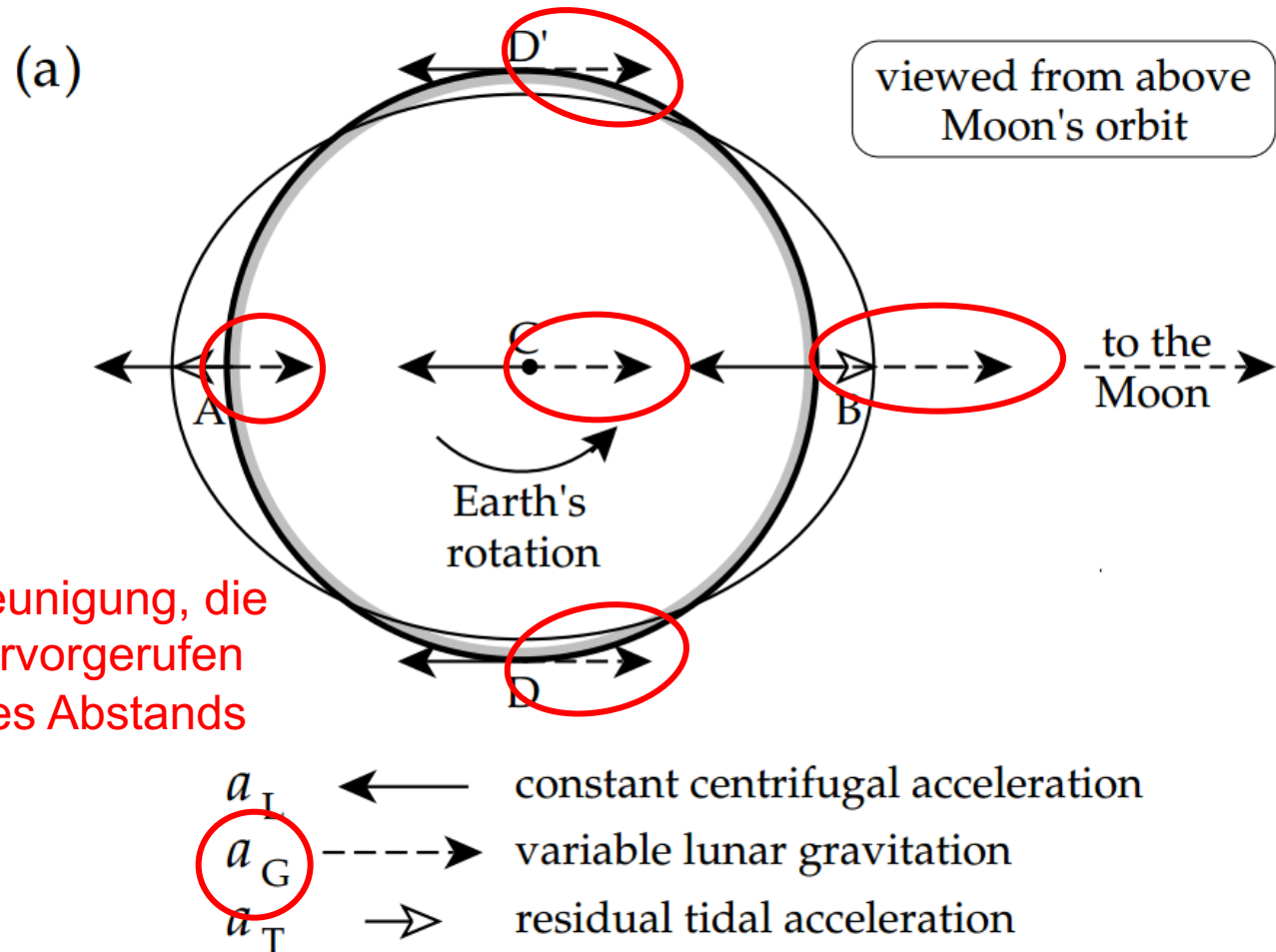
Fig. 2.10 Illustration of the "revolution without rotation" of the Earth-Moon pair about their common center of mass at S.

Quelle: Lowrie, 2007

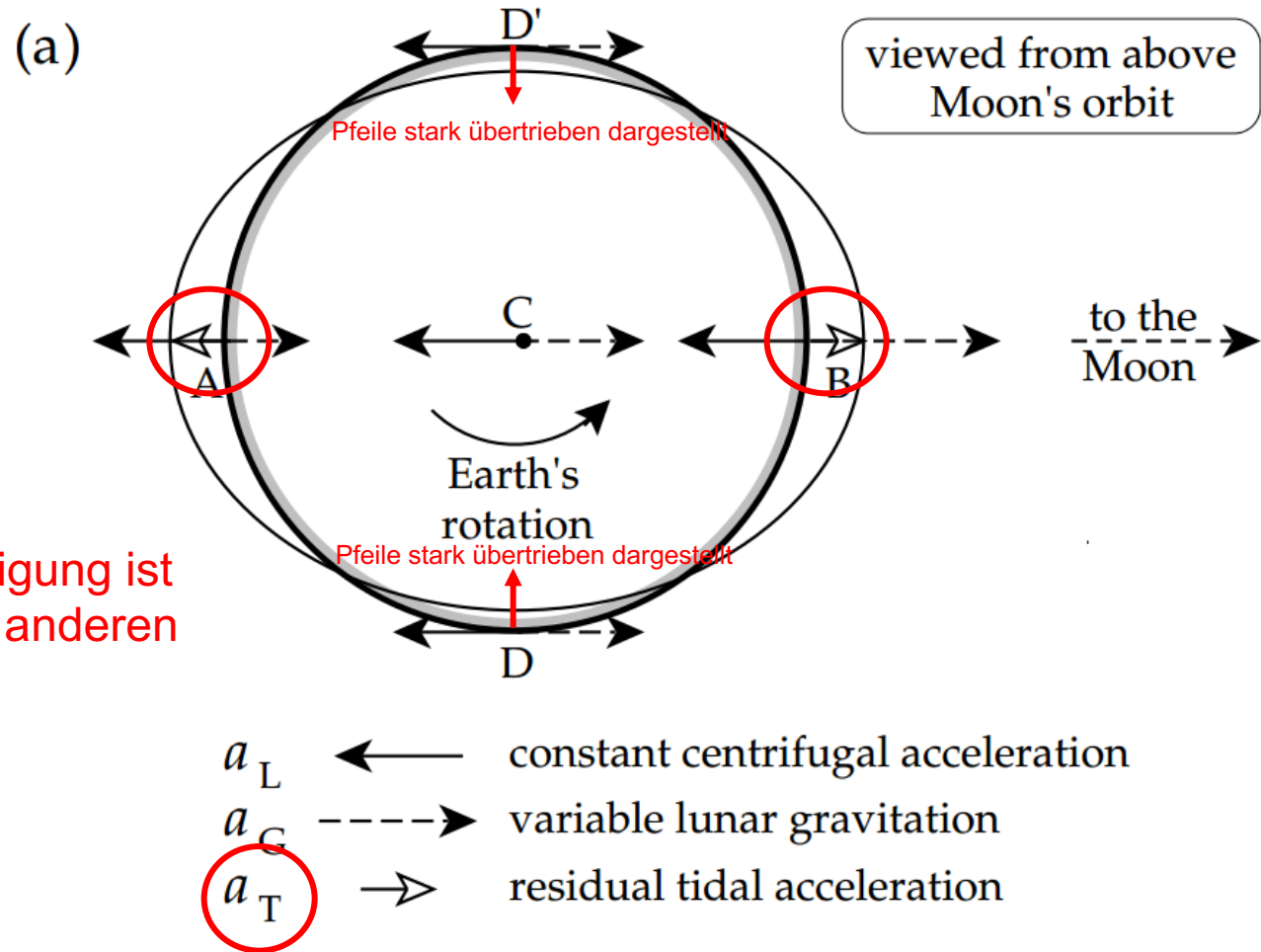


- Zentrifugalbeschleunigung des Systems ist an jedem Punkt auf und in der Erde gleich stark





- Gravitationsbeschleunigung, die durch den Mond hervorgerufen wird, ist Funktion des Abstands und der Richtung

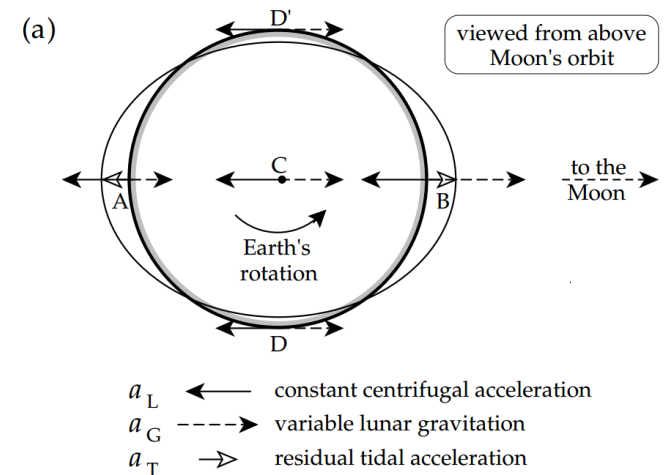


- Gezeitenbeschleunigung ist Summe der beiden anderen Beschleunigungen

In B gilt:

$$a_T = GM_M \left(\frac{1}{(r_{EM} - r_E)^2} - \frac{1}{r_{EM}^2} \right)$$

$$= \frac{GM_M}{r_{EM}^2} \left[\left(1 - \frac{r_E}{r_{EM}} \right)^{-2} - 1 \right] .$$

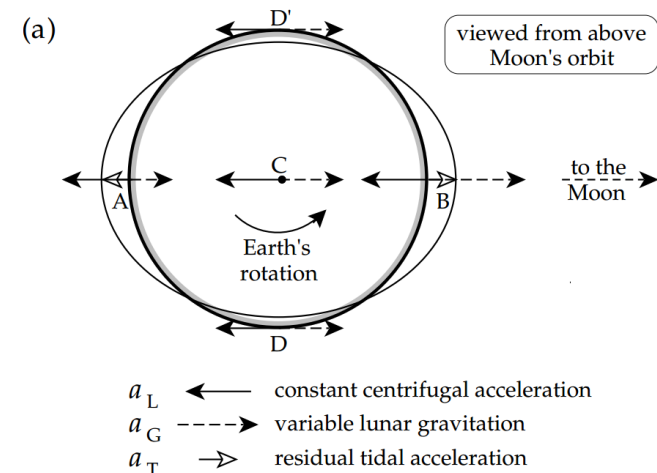


Gezeiten

In B gilt:

$$a_T = GM_M \left(\frac{1}{(r_{EM} - r_E)^2} - \frac{1}{r_{EM}^2} \right)$$

$$= \frac{GM_M}{r_{EM}^2} \left[\left(1 - \frac{r_E}{r_{EM}} \right)^{-2} - 1 \right].$$

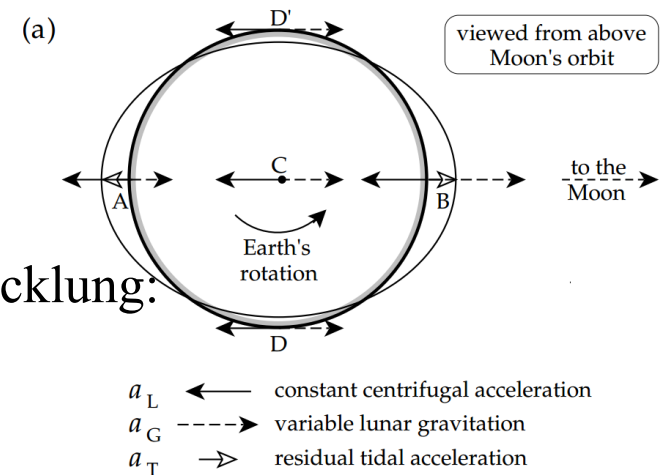


Der quadratische Ausdruck in der Klammer kann für $x < 1$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes in eine Potenzreihe entwickelt werden: $(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$
Damit folgt:

$$a_T \approx \frac{GM_M}{r_{EM}^2} \left[2 \left(\frac{r_E}{r_{EM}} \right) + 3 \left(\frac{r_E}{r_{EM}} \right)^2 + \dots \right]. \quad (4.27)$$

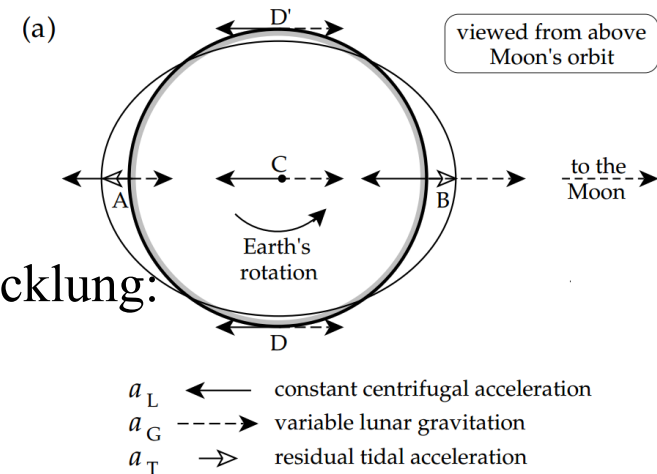
In C gilt mit der entsprechenden Reihen-Entwicklung:

$$\begin{aligned}
 a_T &= GM_M \left(\frac{1}{r_{EM}^2} - \frac{1}{(r_{EM} + r_E)^2} \right) \\
 &= \frac{GM_M}{r_{EM}^2} \left[1 - \left(1 + \frac{r_E}{r_{EM}} \right)^{-2} \right] \\
 &\approx \frac{GM_M}{r_{EM}^2} \left[2 \left(\frac{r_E}{r_{EM}} \right) - 3 \left(\frac{r_E}{r_{EM}} \right)^2 + \dots \right] . \quad (4.28)
 \end{aligned}$$



In C gilt mit der entsprechenden Reihen-Entwicklung:

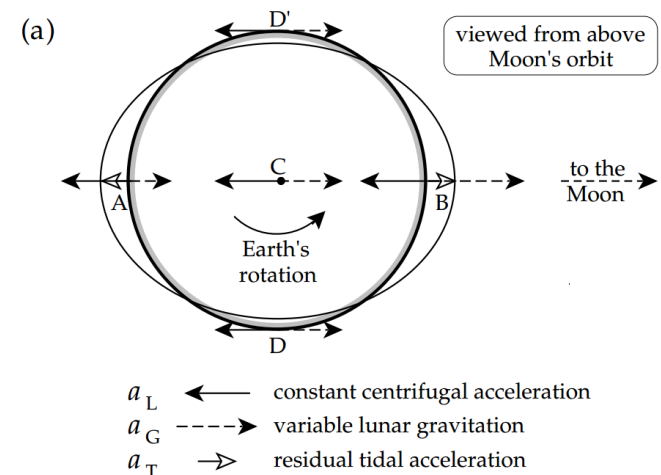
$$\begin{aligned}
 a_T &= GM_M \left(\frac{1}{r_{EM}^2} - \frac{1}{(r_{EM} + r_E)^2} \right) \\
 &= \frac{GM_M}{r_{EM}^2} \left[1 - \left(1 + \frac{r_E}{r_{EM}} \right)^{-2} \right] \\
 &\approx \frac{GM_M}{r_{EM}^2} \left[2 \left(\frac{r_E}{r_{EM}} \right) - 3 \left(\frac{r_E}{r_{EM}} \right)^2 + \dots \right] . \quad (4.28)
 \end{aligned}$$



Gezeiten

In C gilt mit der entsprechenden Reihen-Entwicklung:

$$\begin{aligned}
 a_T &= GM_M \left(\frac{1}{r_{EM}^2} - \frac{1}{(r_{EM} + r_E)^2} \right) \\
 &= \frac{GM_M}{r_{EM}^2} \left[1 - \left(1 + \frac{r_E}{r_{EM}} \right)^{-2} \right] \\
 &\approx \frac{GM_M}{r_{EM}^2} \left[2 \left(\frac{r_E}{r_{EM}} \right) - 3 \left(\frac{r_E}{r_{EM}} \right)^2 + \dots \right] . \quad (4.28)
 \end{aligned}$$



Die Gezeitenbeschleunigungen auf der dem Mond zu- bzw. abgewandten Seite unterscheiden sich somit um ca. 5,6 %

Quelle: Clauser, 2015

Gezeiten

Vergleich der Gezeitenbeschleunigung a_T mit der Gravitationsbeschleunigung a_g

$$\frac{a_T}{a_g} \approx \frac{2GM_M r_E}{r_{EM}^3} \frac{r_E^2}{GM_E} = 2 \underbrace{\frac{M_M}{M_E}}_{0,0123} \left(\frac{r_E}{r_{EM}} \right)^3$$

$$= 0,0246 \left(\frac{6,37 \times 10^6 \text{ m}}{3,82 \times 10^8 \text{ m}} \right)^3 \approx 10^{-7} .$$

Gezeiten

Vergleich der Gezeitenbeschleunigung a_T mit der Gravitationsbeschleunigung a_g

$$\frac{a_T}{a_g} \approx \frac{2GM_M r_E}{r_{EM}^3} \frac{r_E^2}{GM_E} = 2 \underbrace{\frac{M_M}{M_E}}_{0,0123} \left(\frac{r_E}{r_{EM}} \right)^3$$

$$= 0,0246 \left(\frac{6,37 \times 10^6 \text{ m}}{3,82 \times 10^8 \text{ m}} \right)^3 \approx 10^{-7} .$$

Auch die Sonne ruft Gezeiten hervor: Stärke etwa 46% der Mondgezeiten.

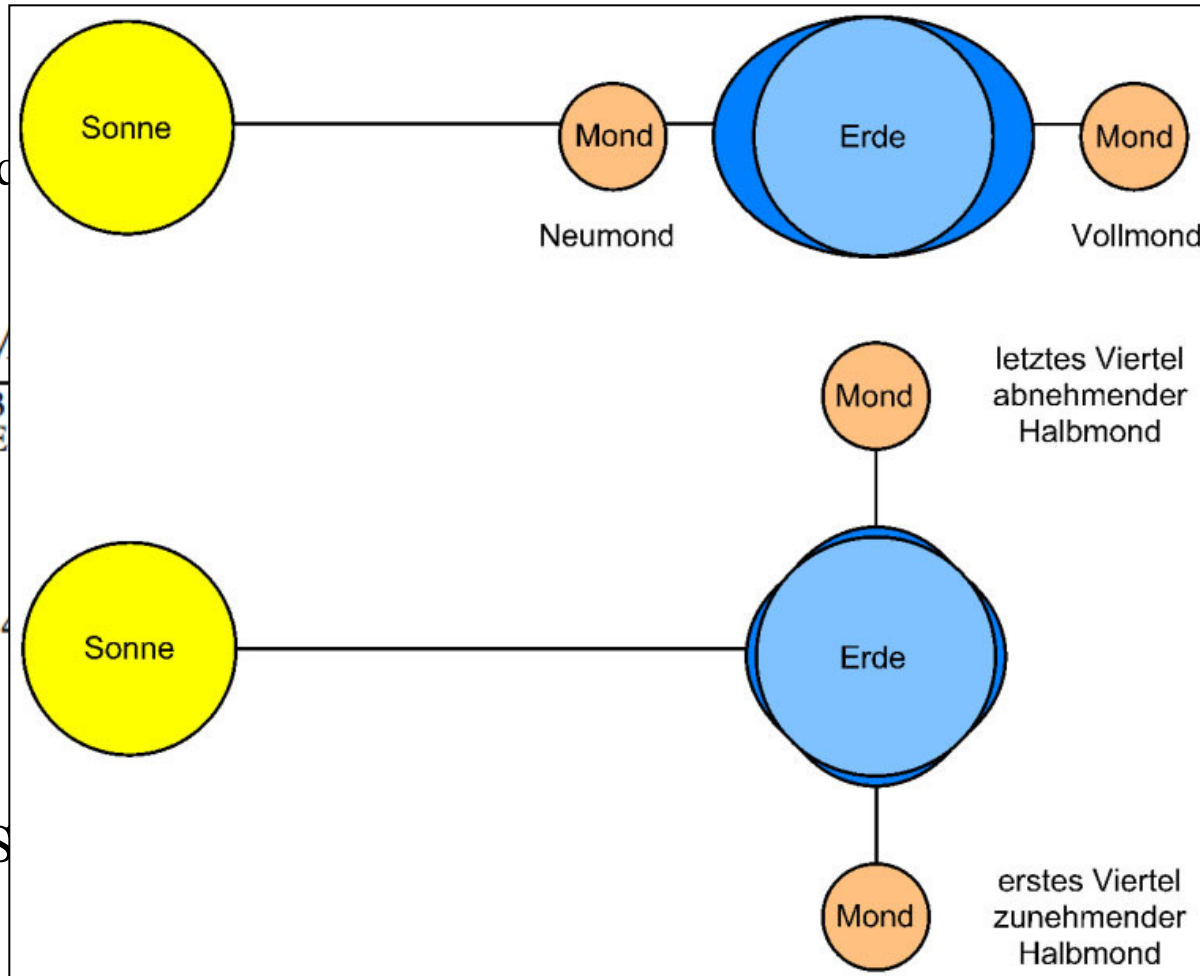
Gezeiten

Vergleich d

$$\frac{a_T}{a_g} \approx \frac{2GM}{r_E^3}$$

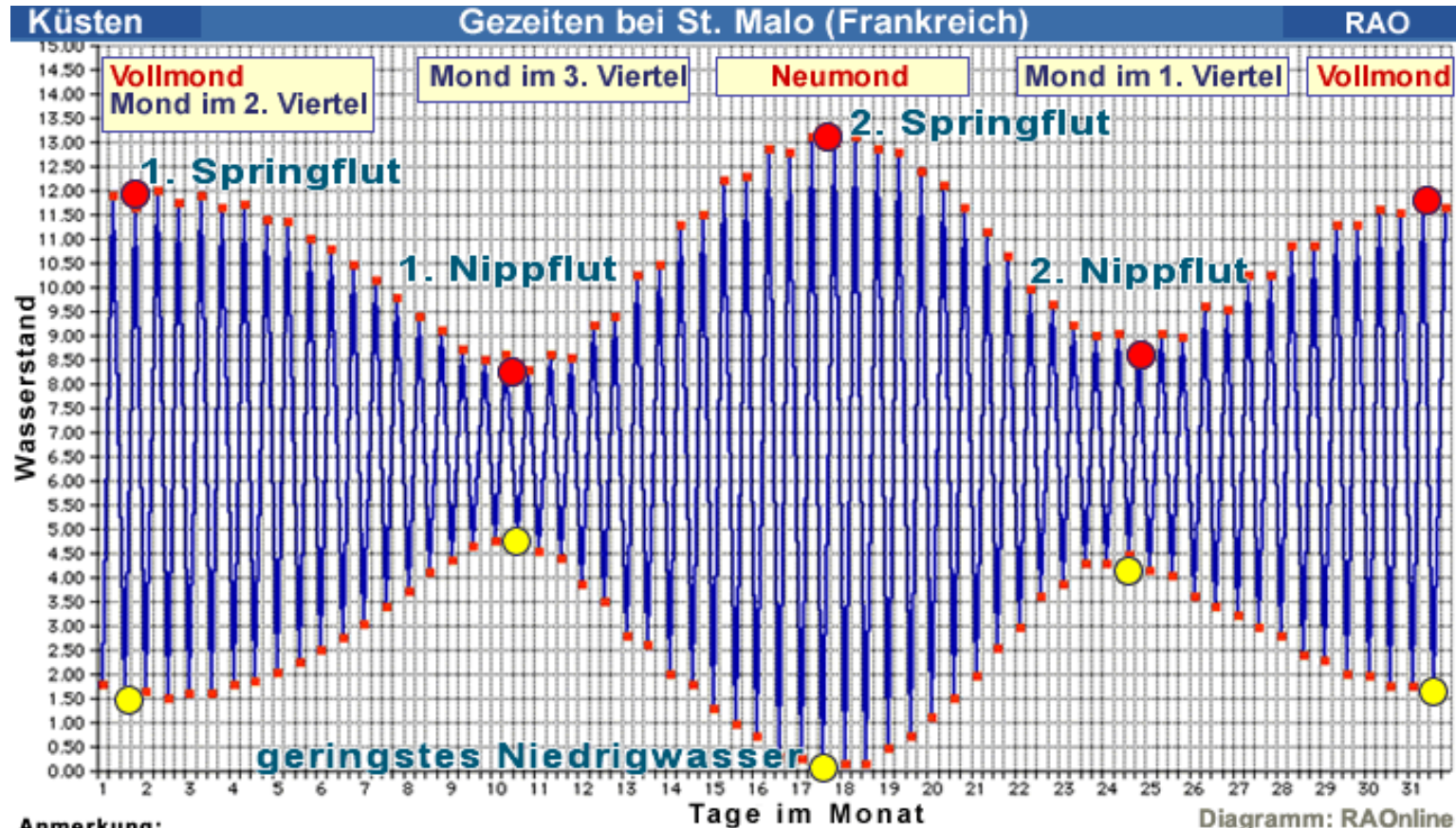
$$= 0,024$$

Auch die S



leunigung a_g

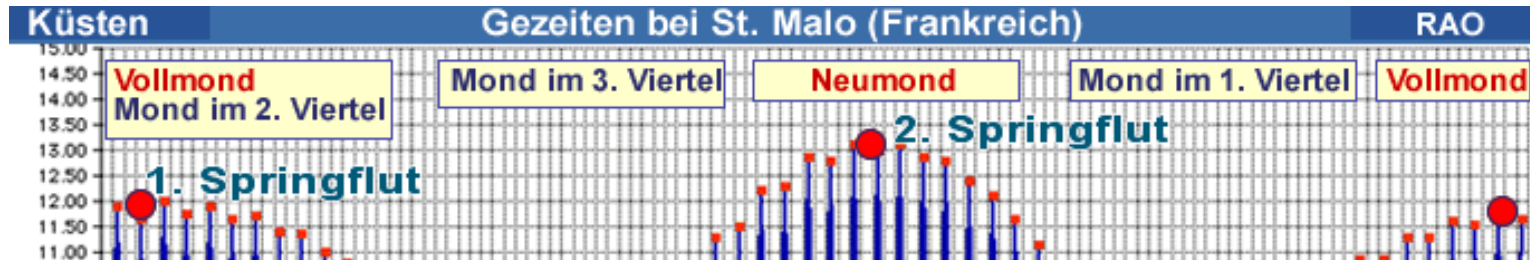
ezeiten.



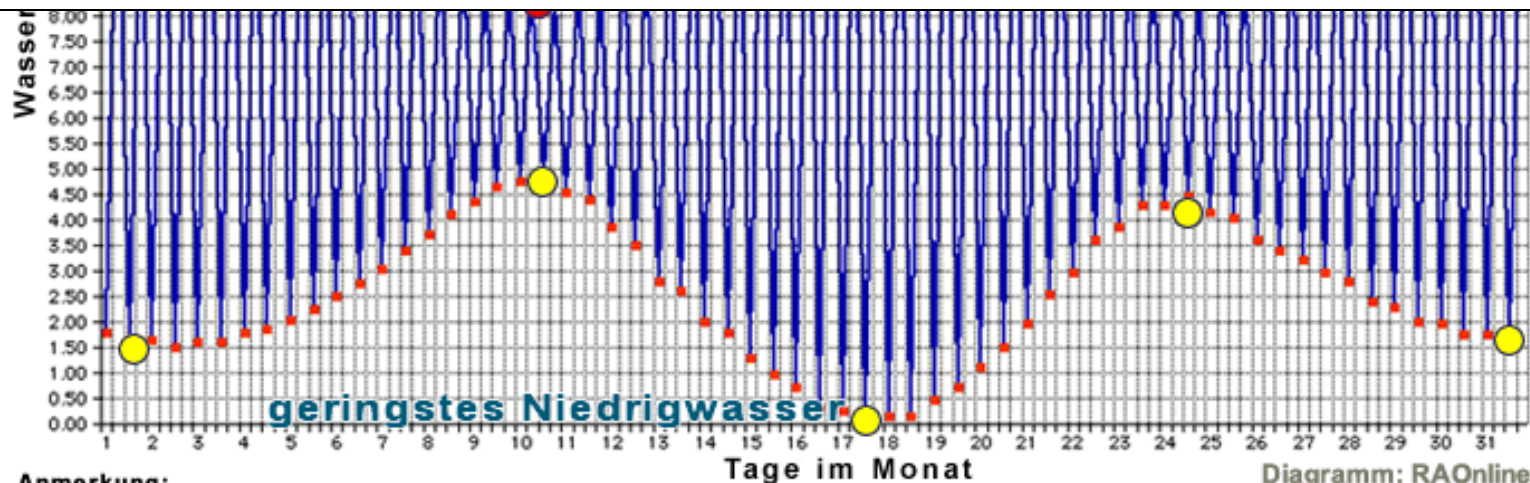
Anmerkung:

Die Daten und Zeiten für die einzelnen Gezeitenphasen hängen vom jeweiligen Mondstand ab. Die Daten für die Spring- und Nippfluten verändern sich von Monat zu Monat. Das oben dargestellte Beispiel kann daher nicht auf andere Monate übertragen werden.

Gezeiten



- Mittlerer Gezeitenhub der Wasseroberfläche: ± 21 cm
- Mittlerer Gezeitenhub der „festen“ Erde: ± 9 cm (bei Springflut bis zu 21 cm)



Anmerkung:

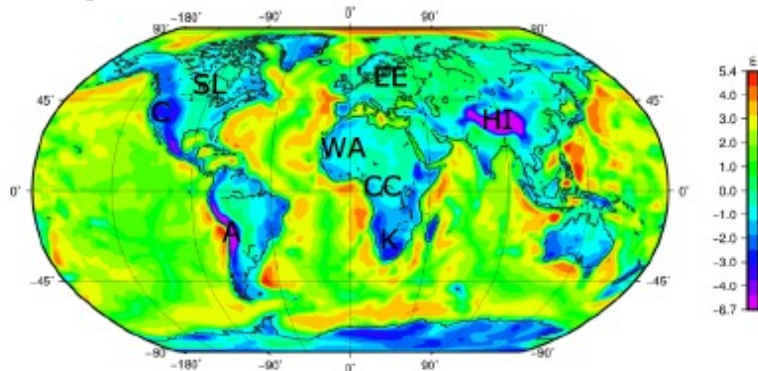
Die Daten und Zeiten für die einzelnen Gezeitenphasen hängen vom jeweiligen Mondstand ab. Die Daten für die Spring- und Nippfluten verändern sich von Monat zu Monat. Das oben dargestellte Beispiel kann daher nicht auf andere Monate übertragen werden.

Quelle: Clauser, 2015

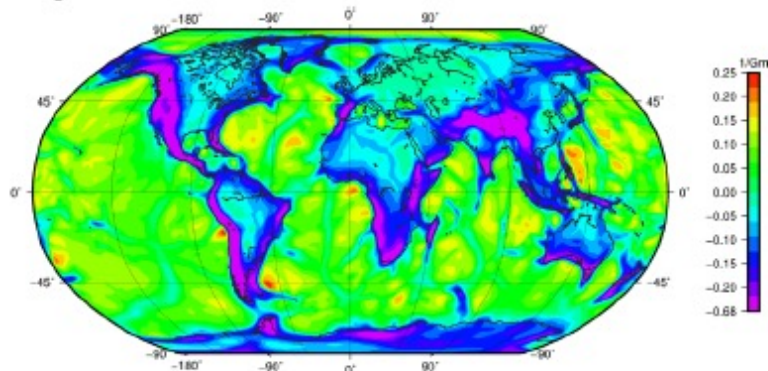
GOCE: Neuauswertung



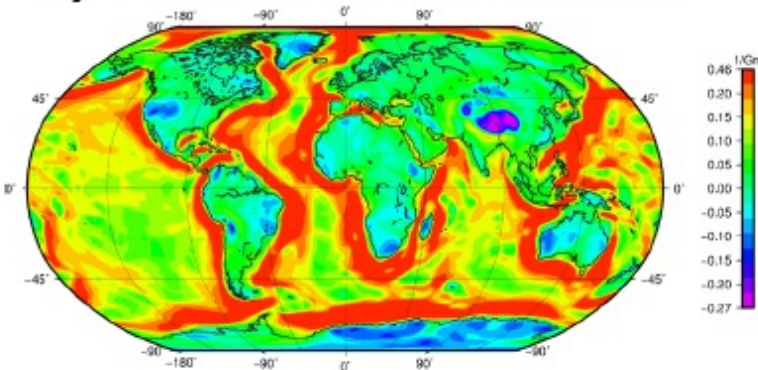
a) Vertical Gradient



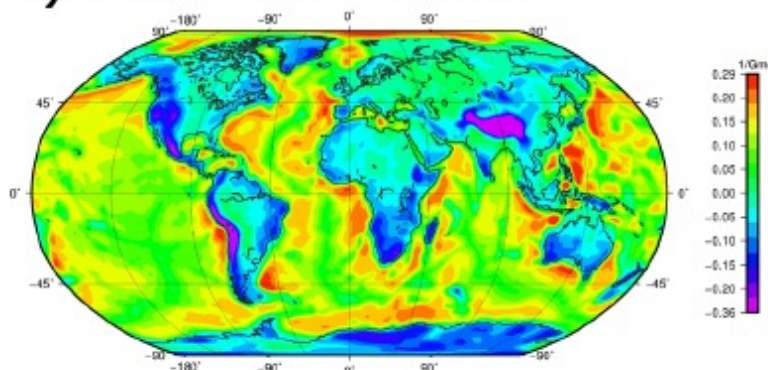
b) Minimum Curvature



c) Maximum Curvature

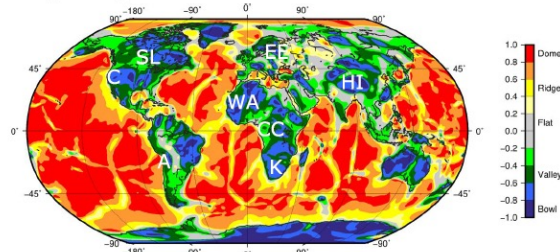


d) Mean Curvature

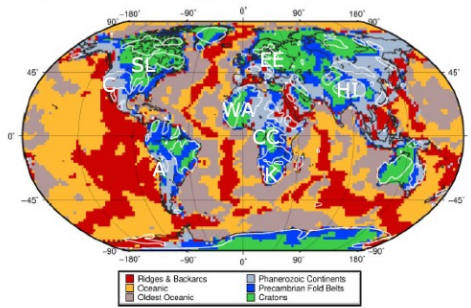


Ebbing et al. 2018

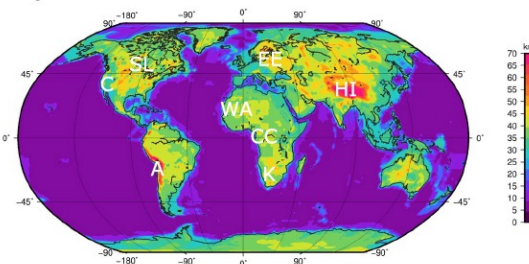
a) Shape Index



b) Tectonic regularisation

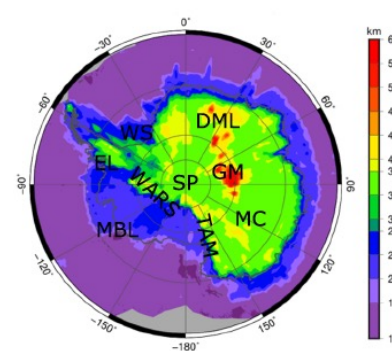


c) Crustal thickness

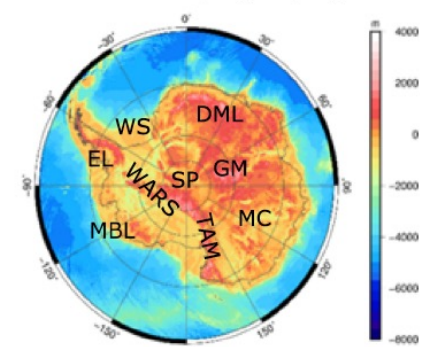


Antarctica

Crustal thickness



Bedrock topography



Ebbing et al. 2018





Zusammenfassung – Take-home-message

- Wie lässt sich die Gestalt der Erde (Größe, Form) beschreiben und messen?
Kugel, Ellipsoid, Geoid/ Messung heute mit Satellitenverfahren
- Wie lässt sich die Schwere physikalisch erklären und mathematisch beschreiben?
Aufteilung in Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung, Beschreibung als Potential, Addition der Potentiale
- Wie lässt sich die Schwere messen (= Gravimetrie)?
siehe oben, Messung der Gestalt der Erde
- Welchen Einfluss haben die Gezeiten auf die Schweremessungen?
Größenordnung 10^{-7} – diese Genauigkeit ist erforderlich, um Gezeiten zu messen