

6. Übung zur Einführung in die Geophysik II

Thema: Temperatur

Übungsblatt online: Mi. 05.07.23, 13:00 Uhr,
Besprechung des Übungsblattes: Mo. 17.07.23, 11:30-13:00, HS B

Aufgabe 1: Mechanismen der Wärmeausbreitung

- Welche Mechanismen der Wärmeausbreitung kennen Sie?
- Welche dieser Mechanismen spielen in der Erde eine Rolle und in welchen Bereichen der Erde sind sie relevant?

Aufgabe 2: Wärmeleitfähigkeit

Die Werte der Wärmeleitfähigkeit k (in deutscher Literatur oft auch λ genannt) von Gasen und Festkörpern variieren über einen großen Bereich.

- Suchen Sie in der Literatur nach Werten für die Wärmeleitfähigkeiten von verschiedenen Werkstoffen (Metalle, Holz, Ziegel, Beton, Luft).
- Welches Material isoliert am besten die Wärme?
- Warum haben Kochtöpfe oft einen Kupferboden?

Aufgabe 3: Oberflächentemperatur der Erde

Die Temperatur an der Erdoberfläche wird durch das Gleichgewicht von Sonneneinstrahlung und Wärmeabstrahlung in den Weltraum bestimmt.

- Bei senkrechtem Einfall strahlt die Sonne auf die Erdoberfläche eine Leistung pro Quadratmeter von $S_0 = 1367 \text{ W/m}^2$ (Solarkonstante). Wie groß ist die gesamte auf die Erde eingestrahlte Leistung? Gehen Sie überall von senkrechtem Einfall aus und verwenden Sie für den Erdradius den Wert von $r_e = 6370 \text{ km}$.
- Unter Vernachlässigung der Wirkung der Atmosphäre gilt für die Temperatur T :

$$T = \sqrt[4]{\frac{S_0}{4\sigma}(1 - \alpha)}$$

Berechnen Sie die Temperatur an der Erdoberfläche. Die Albedo beträgt $\alpha = 0,3$ und die Boltzmann-Konstante hat den Wert $\sigma = 5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$.

- Wie stark ist die Temperatur an der Erdoberfläche von Schwankungen der Solarkonstanten abhängig? Der elfjährige Sonnenfleckenzyklus verursacht Schwankungen in der Größenordnung von 0,1%. Berechnen Sie die Änderung der Oberflächentemperatur ΔT .

Aufgabe 4: Wärmeleitungsgleichung

Aus der zeitabhängigen Wärmeleitungsgleichung ohne Quellterm $dT/dt = \kappa \cdot d^2T/dz^2$ erhält man als Lösung für die Temperaturvariation in der Tiefe, die durch eine periodische Schwankung der Oberflächentemperatur hervorgerufen wurde, folgenden Ausdruck:

$$T = T_0 + \delta T e^{-y\sqrt{\omega/2\kappa}} \cos(\omega t - y\sqrt{\omega/2\kappa}).$$

Hieraus kann man die Eindringtiefe (englisch: skin depth) der Störung d bestimmen, die lautet

$$d = \sqrt{(2 \cdot \kappa / \omega)}.$$

Dabei bezeichnet κ die Temperaturleitfähigkeit und $\omega = 2\pi / T$ die Kreisfrequenz der Störung, wobei T die Periode der Störung ist. In der Eindringtiefe d ist die Amplitude der Störung auf $1/e$ abgeklungen. Die Phasenverschiebung φ der Störung erhält man aus dem Argument der trigonometrischen Funktion dieser Lösung. Sie beträgt

$$\varphi = y\sqrt{\omega/2\kappa}.$$

- a) Berechnen Sie die Eindringtiefe der jährlichen Temperaturvariation und für die Temperaturleitfähigkeit $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. In welcher Tiefe sind die Temperaturen genau 180° außer Phase (wärmste Temperaturen im Winter, kälteste im Sommer)?
- b) Wie groß ist hingegen die Eindringtiefe einer täglichen Schwankung? Wann ist die tägliche Schwankung 180° außer Phase?

Aufgabe 5: Wärmestromdichte

Die Wärmestromdichte q (auch Wärmefluss genannt) in der Kruste lässt sich zu einem großen Anteil aus der Wärmeproduktion H radioaktiver Elemente erklären. Als typischer Wert für die Wärmeproduktion in oberflächennahen Graniten misst man $H_0 = 9,6 \cdot 10^{-10} \text{ W/kg}$. Nehmen Sie an, die mittlere Dichte ρ der Kruste sei 2700 kg/m^3 und die Dicke der Kruste h betrage 35 km .

- a) Wie groß ist die Wärmestromdichte, für die gilt

$$q = \rho H_0 h?$$

- b) Vergleichen Sie diesen Wert mit der mittleren kontinentalen Wärmestromdichte (Literaturwert). Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 6: Konvektion

In einem Gefäß wird eine Flüssigkeit erwärmt. Unter bestimmten Voraussetzungen beginnt die Flüssigkeit zu konvektieren. Dabei kann die Wärme deutlich effizienter transportiert werden als durch reine Wärmeleitung. Ob Konvektion auftritt, ist von verschiedenen Größen abhängig, die in einer Kennzahl, der dimensionslosen Rayleighzahl, zusammengefasst sind. Die Rayleighzahl ist definiert als

$$Ra = \rho g \alpha \Delta T h^3 / \mu \kappa.$$

Hier ist ρ die Dichte der Flüssigkeit, g die Gravitationsbeschleunigung, α der Volumenausdehnungskoeffizient (auch thermischer Auftrieb genannt), ΔT die Temperaturdifferenz zwischen Boden und Oberfläche der Flüssigkeit, h die Entfernung zwischen Boden und Oberfläche der Flüssigkeit, μ die dynamische Viskosität und κ die Temperaturleitfähigkeit.

Konvektion tritt auf, wenn die Rayleighzahl größer als die kritische Rayleighzahl Ra_c wird, die von der Geometrie des Problems abhängt:

Im Falle einer freien Oberfläche und einer begrenzten Unterseite liegt die kritische Rayleighzahl bei $Ra_c = 1107$. Wasser verhält sich allerdings auch in diesem Fall so, als seien Oberfläche und Boden begrenzt. Die kritische Rayleighzahl liegt dann bei 1708.

Überprüfen Sie, ob in folgenden Fällen die Bedingungen für Wärmeleitung durch Konvektion gegeben sind:

- In einem Kochtopf, der bis zu einer Höhe $h = 10$ cm mit Wasser gefüllt ist. Die Dichte von Wasser beträgt $\rho = 1000$ kg/m³, der Volumenausdehnungskoeffizient beträgt $\alpha = 0,21 \cdot 10^{-3}$ /K. Als Viskosität von Wasser können Sie einen Wert von 1 Pa·s verwenden (gilt für eine Temperatur von 20°C) und die Temperaturleitfähigkeit betrage $\kappa = 10^{-6}$ m²/s. Gehen Sie von einer Temperaturdifferenz von 5 K aus und verwenden Sie $g = 10$ m/s².
- In einem Kochtopf, der bis zu einer Höhe von $h = 10$ cm mit Speiseöl gefüllt ist. Die Dichte von Speiseöl beträgt $\rho = 910$ kg/m³, der Volumenausdehnungskoeffizient α beträgt $0,8 \cdot 10^{-3}$ /K. Als Viskosität von Öl können Sie einen Wert von 100 Pa·s verwenden und die Temperaturleitfähigkeit betrage $\kappa = 0,8 \cdot 10^{-6}$ m²/s. Gehen Sie wieder von einer Temperaturdifferenz von 5 K aus und verwenden Sie $g = 10$ m/s².
- Im Erdmantel. Typische Dichtewerte in der Erde liegen bei $\rho = 3300 - 5500$ kg/m³. Der Wert für den Volumenausdehnungskoeffizient α ist im Erdmantel sehr variabel und kann je nach Material zwischen $1,2 \cdot 10^{-5}$ bis $2,4$ K⁻¹ schwanken. Die Temperaturdifferenz ΔT im Mantel liegt bei etwa 2500 – 4000 K. Der Mantel reicht bis in eine Tiefe von 2900 km. Die Viskosität μ schwankt zwischen 10^{21} und 10^{23} Pa·s und für die Temperaturleitfähigkeit κ können Werte zwischen 10^{-6} und $3 \cdot 10^{-6}$ m²/s angenommen werden. Geben Sie eine obere und eine untere Abschätzung für die Rayleighzahl an.