

Moderne Physik für Lehramt

1) Konzepte der klassischen Physik

Prof. David Hunger

Klassische Mechanik

Newton'sche Axiome

1) Trägheitsprinzip

Inertialsystem: Körper bewegen sich gleichförmig geradlinig oder ruhen, wenn keine äußere Kräfte auf sie einwirken (inertia: Trägheit)

2) Aktionsprinzip

Impulsänderung ist proportional zur einwirkenden Kraft

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{x}}(t)$$

3) Wechselwirkungsprinzip („actio est reactio“): Übt ein Körper A auf einen Körper B eine Kraft aus, so übt B auf A eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft aus

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

Galilei-Transformation

Zwei Beobachter in Koordinatensystemen S , S' , die sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit u zueinander bewegen, betrachten Punkt A.

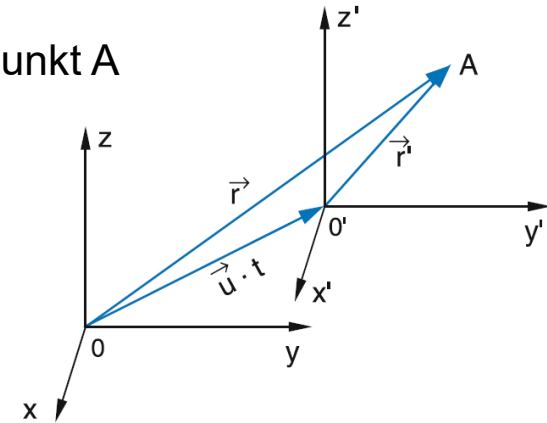
Galilei-Transformationen für Ort, Geschwindigkeit ... von Punkt A

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{u}) = \vec{a}' \rightarrow F = F'$$

$$t = t'$$



Physik ändert sich nicht bei Wahl eines anderen Inertialsystems

Achtung: Galilei-Transformationen gelten nur für $u \ll c$

Impulserhaltung

Aus dem 2. Newton'schen Axiom folgt: Bei Abwesenheit von Kräften ist der Impuls erhalten

$$\vec{F} = 0 \rightarrow \dot{\vec{p}} = 0, \quad \vec{p} = \text{const.}$$

System aus vielen Teilchen i hat Gesamtimpuls P

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

In Abwesenheit äußerer Kräfte ist auch der Gesamtimpuls erhalten

$$\dot{\vec{P}} = 0 \rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \text{const.} = \vec{P}(t = t_0)$$

Systeme ohne äußere Einwirkungen nennt man abgeschlossene Systeme
In abgeschlossenen Systemen ist der Gesamtimpuls erhalten

Arbeit und potenzielle Energie

- Definition der Arbeit entlang eines Weges

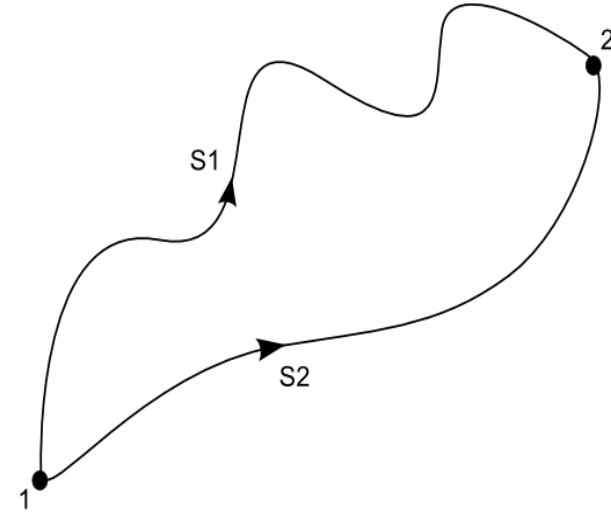
$$W = \int_S \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

- Wenn die Arbeit unabhängig vom Weg ist nennt man die Kraft „konservativ“
- Bsp: Gravitationskraft, Coulombkraft
- Die Arbeit hängt dann nur noch von den Endpunkten ab

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

- Wenn man einen festen Bezugspunkt wählt, ergibt sich die potenzielle Energie (=„Arbeitsfähigkeit“)

$$E_{pot}(\vec{r}) = -W(\vec{r}_0, \vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$



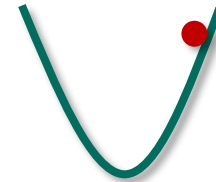
Potentielle Energie, Potential

- Es ist hilfreich, die potentielle Energie unabhängig von einem Körper zu definieren → dividiere durch Masse (Gravitation) / Ladung (Coulomb Kraft)
- Daraus folgt das zur Kraft gehörige Potential

$$V(\vec{r}) = E_{pot}/m \quad \text{bzw} \quad V(\vec{r}) = E_{pot}/q$$

Beispiele

- Masse an Feder $F = -kx, \quad V(x) = \frac{1}{2} k x^2$
- Gravitationskraft $F_G(h) = mg, \quad V_G(h) = g h$
- Coulomb Kraft $F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{\vec{r}^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$



Anmerkung: Bei der Coulomb & Gravitations-Kraft legt man den Bezugspunkt ins Unendliche: $\vec{r}_0 \rightarrow \infty$

Kraft und Potential

Die skalare Größe V ist sehr viel einfacher als das Vektorfeld der Kraft.
Daher charakterisiert man konservative Kraftfelder über ihr Potential V

Die Umkehrung der Weg-Integration ist die Gradientenbildung:
man erhält damit die Kraft aus dem Potential

$$\vec{F}_C(\vec{r}) = -q \vec{\nabla} V(\vec{r}) = -q \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} V(\vec{r})$$

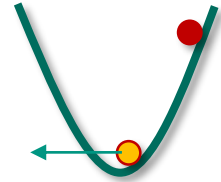
Kinetische Energie

Wenn eine Masse beschleunigt wird, ist nach dem zweiten Newton'schen Axiom eine Kraft nötig. Da die Kraft entlang des Weges der Masse wirkt, ist dazu „Beschleunigungs“- Arbeit nötig, die als **kinetische Energie** gespeichert wird:

$$E_{kin} = \int F dx = \int m \frac{dv}{dt} v dt = m \int v dv = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Bei vielen mechanischen Prozessen wird periodisch potentielle Energie in kinetische verwandelt und umgekehrt

Beispiele: Pendel, Schaukel, Federpendel, Achterbahn



$$E = E_{pot} + E_{kin} = const.$$

Die mechanische Energie ist erhalten wenn nur konservative Kräfte wirken

Achtung: Die Reibungskraft ist keine konservative Kraft

Schwingungen

Wenn eine Kraft auf eine Masse entgegengesetzt zum Weg wirkt, im einfachsten Fall proportional zum Weg, $F = -kx$, entsteht eine Schwingung.

Wirkt zusätzlich eine Dämpfung (z.B. durch Reibung), ergibt sich eine gedämpfte Schwingung.

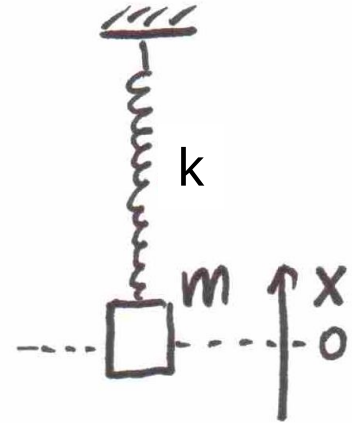
Häufig ist der Reibungsterm proportional zur Geschwindigkeit:

$$F_r = -b\dot{x}$$

Einsetzen in die Gleichung des 2. Newtonschen Axioms: $F + F_r = m\ddot{x}$

Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$



Ungedämpfte Schwingung

- Keine Reibung: $b = 0 \rightarrow \ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t)$
- Suche Lösung deren zweite Ableitung das Negative von sich selbst ergibt: $\sin(\quad), \cos(\quad)$

- Lösung:

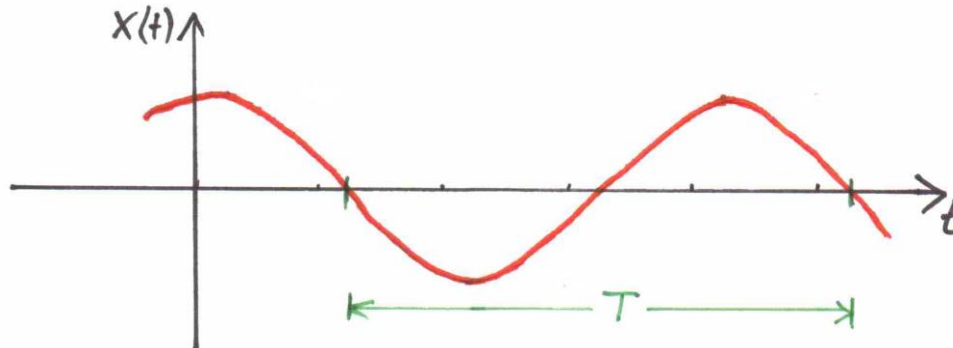
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ Eigenfrequenz des Oszillators

Amplitude

Frequenz

Phasenwinkel



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Winkelgeschwindigkeit

$$T$$

Periode

$$\nu = \frac{1}{T}$$

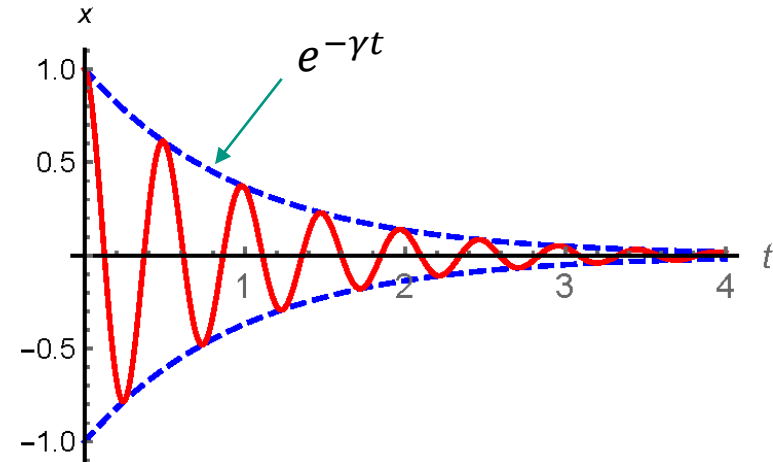
Frequenz

Gedämpfte Schwingung

Für $b > 0$: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ mit $\gamma = b/2m$

Lösung $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$ mit $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 > 0$

Bei starker Dämpfung ($\gamma > \omega_0$) ergibt sich
Keine Oszillation, sondern nach Auslenkung
langsam zu Null abfallende Bewegung



Komplexe Zahlen

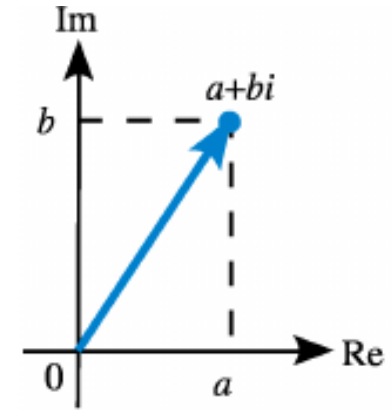
- Schwingungen werden oft mit komplexen Zahlen beschrieben
→ einfachere Rechnungen
- Komplexe Zahlen bestehen aus einem Real- und einem Imaginärteil.
Sie lassen sich in der komplexen Ebene veranschaulichen

$$z = a + ib$$

i komplexe Einheit, $i = \sqrt{-1}$

a Realteil von z : $a = \operatorname{Re}(z)$

b Imaginärteil von z $b = \operatorname{Im}(z)$



Addition komplexer Zahlen

$$a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

Multiplikation komplexer Zahlen

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + i ad + i bc + i^2 bd = (ac - bd) + i(bc + bd)$$

Komplexe Zahlen: Polardarstellung

- Darstellung von Zeiger mit Betrag und Phase
- Trigonometrische Funktionen und komplexe Exponentialfunktion

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

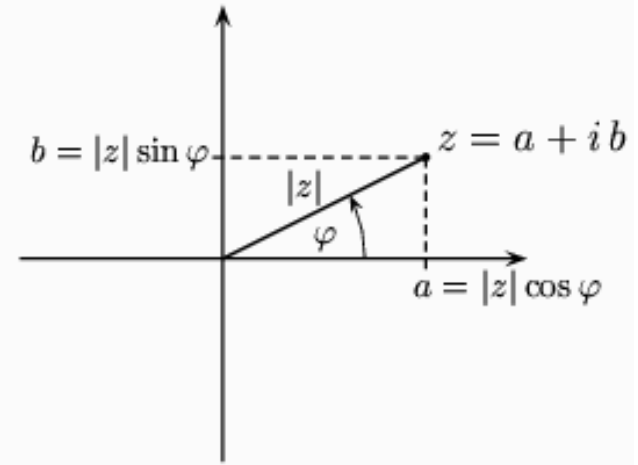
Damit lässt sich jede komplexe Zahl schreiben als

$$z = a + ib = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i\varphi}$$

Euler'sche Formel

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi)$$

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$$



Komplex konjugierte Zahl

$$z = a + ib \rightarrow z^* = a - ib$$

$$z z^* = |z|^2$$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung

- Gedämpfte Schwingung $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Die Lösung vieler Differentialgleichungen wird einfacher wenn man komplexwertige Lösungsfunktionen zulässt. Da Messgrößen oder Beobachtungsgrößen (=„Observable“) immer reellwertig sind, ist (in der klass. Physik) nur der Realteil der Lösung interessant

- komplexwertiger Lösungsansatz:

$$X(t) = \exp(-i\omega t)$$

- Einsetzen: $-\omega^2 - i2\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$

- hat die beiden Lösungen $\omega_{1,2} = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Komplexwertige Lösung der Schwingungsgleichung

Die Theorie zur Lösung von Differentialgleichungen besagt, dass sich die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung der Ordnung n durch Linearkombination von n linear unabhängigen speziellen Lösungen ergibt.

Für unsere Bewegungsgleichung 2. Ordnung haben wir diese soeben gefunden:

$$X_{1,2}(t) = \exp(-i\omega_{1,2}t)$$

Allgemeine Lösung:

$$X(t) = A \exp(-i\omega_1 t) + B \exp(-i\omega_2 t)$$

Für $\omega_0 > \gamma$ ist der Wurzelausdruck reell, definiere $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$X(t) = \exp(-\gamma t) [A \exp(-i\omega t) + B \exp(i\omega t)]$$

Betrachte Realteil: $x(t) = \operatorname{Re}(X(t)) = \exp(-\gamma t) (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$

Wellen

- Eine Welle resultiert von der Propagation einer Schwingung im Raum durch die Kopplung benachbarter Oszillatoren

- Nach einer Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ist die Welle eine Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ gelaufen

$k = 2\pi/\lambda$ Wellenzahl (= Ortsfrequenz)

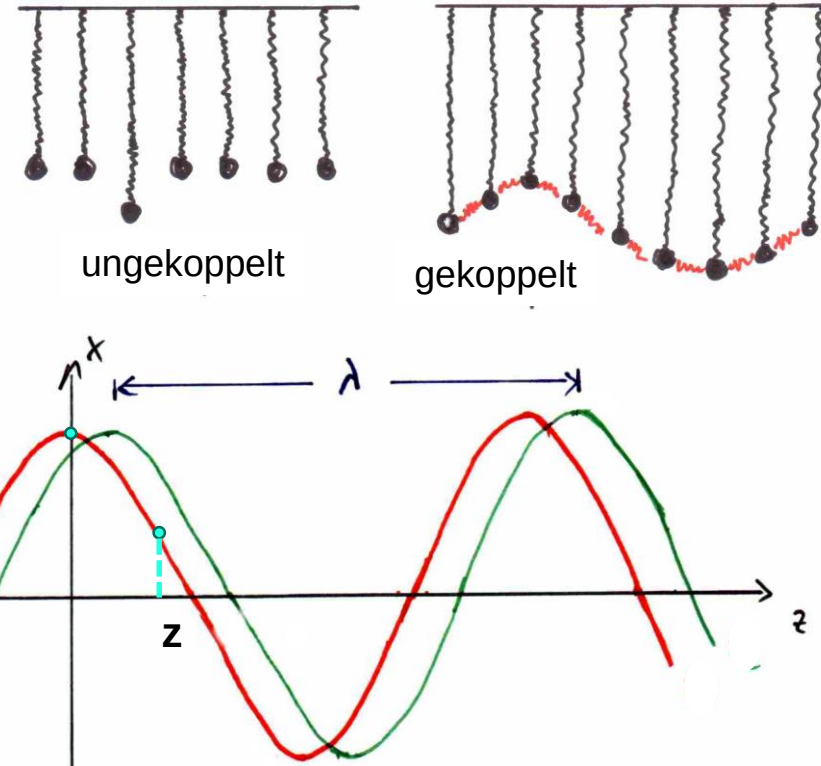
$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx) = \operatorname{Re}(A e^{i(\omega t - kx)})$$

- Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

- Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + v_p^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0$$



Wellenpakete und Dispersion

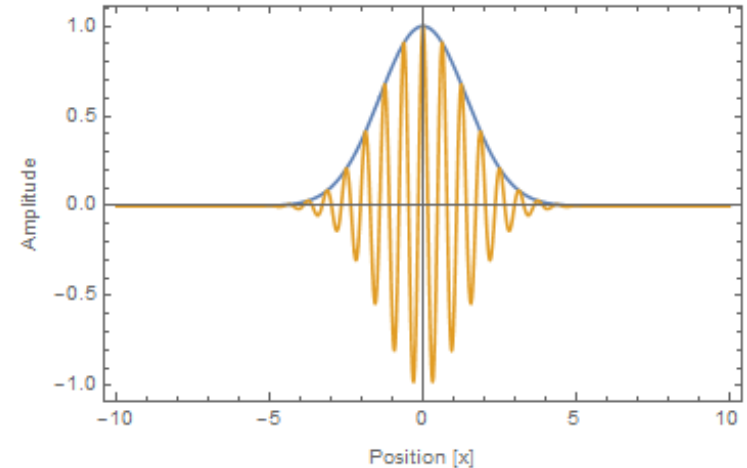
- Durch Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenzen (Fourier-Integral) entsteht ein Wellenpaket:

$$A(t, x) = \int_0^\infty \hat{A}(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega$$

- Die Geschwindigkeit des Wellenpakets ist die Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

i.A. $v_g \neq v_p$

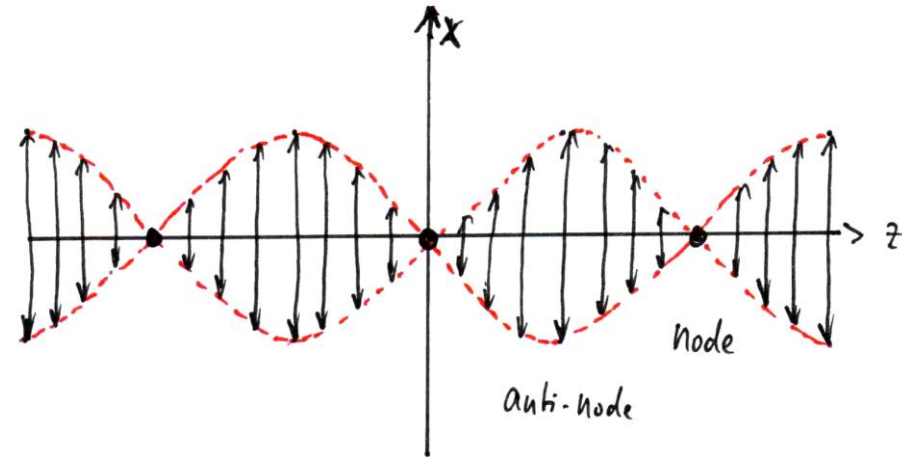
Oft hängt die Phasengeschwindigkeit von der Frequenz ab. Dann läuft das Wellenpaket auseinander → **Dispersion**



Stehende Wellen

Zwei gegenläufige Wellen mit gleicher Wellenzahl, Frequenz und Amplitude erzeugen eine stehende Welle

$$\begin{aligned}\sin(kz - \omega t) + \sin(-kz - \omega t) \\ = 2 \cos(kz) \sin(\omega t)\end{aligned}$$



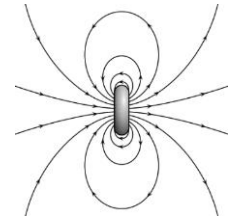
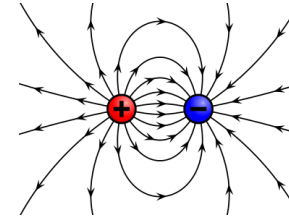
Positionen von Knoten (node) und Bauch (anti-node) bleiben fest

Elektromagnetische Wellen

Grundgleichungen der Elektrodynamik: **Maxwell Gleichungen**
in Vakuum:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \dot{\mathbf{E}}\end{aligned}$$



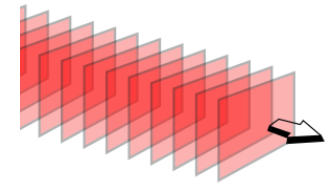
Wellengleichung

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{1}{c} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

Phasengeschwindigkeit c

Einfachste Lösung: Ebene Welle

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = A e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \phi)}$$



Wikipedia