

Moderne Physik für Lehramt

2) Spezielle Relativitätstheorie

Prof. David Hunger

Probleme der klassischen Physik bei hohen Geschwindigkeiten

Elektromagnetische Wellen

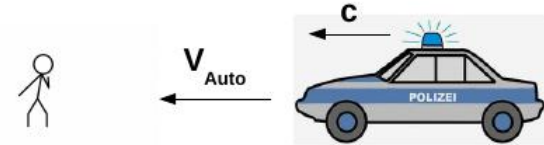
Phasengeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ hängt von Naturkonstanten ab

Müsste daher in allen Systemen unveränderlich sein

Galilei-Transformation angewandt auf Licht

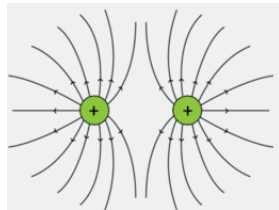
Galilei: $v_{\text{Licht}} = v_{\text{Auto}} + c$

Maxwell: $v_{\text{Licht}} = c$

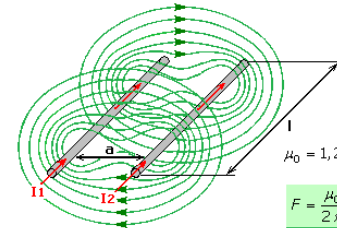


Galilei-Transformation angewandt auf ruhende Ladungen

gleichnamige Ladungen
stoßen sich ab



Galilei-Transformation



parallele Ströme
Ziehen sich an

Suche nach dem Äther

In welchem Medium breitet sich Licht aus?

- Schallwellen, Wasserwellen breiten sich in Medien aus; Phasengeschwindigkeit gegeben durch Eigenschaften des Mediums

Hypothetisches Medium für Licht: Äther

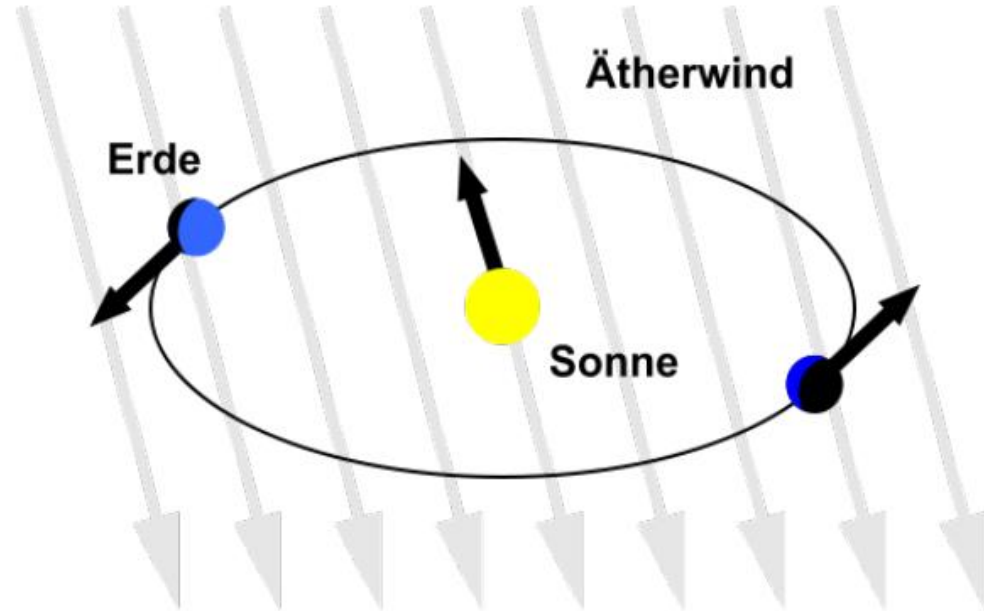
- Ursprung: Aristotelische Elementlehre
- Gravitationskraft wirkt über Ätherströme (Newton)
- Licht breitet sich im Äther aus (Huygens)



Nachweis des Äthers

Idee

Nutze Bewegung der Erde um die Sonne – die größte Geschwindigkeit, die seinerzeit verfügbar war – und suche nach Unterschieden in der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht parallel oder senkrecht zur Geschwindigkeit der Erde



Michelson-Morley Experiment (1887)

Interferenz von Licht in zwei Lichtwegen
senkrecht und parallel zum angenommenen Ätherwind

Lichtlaufzeiten

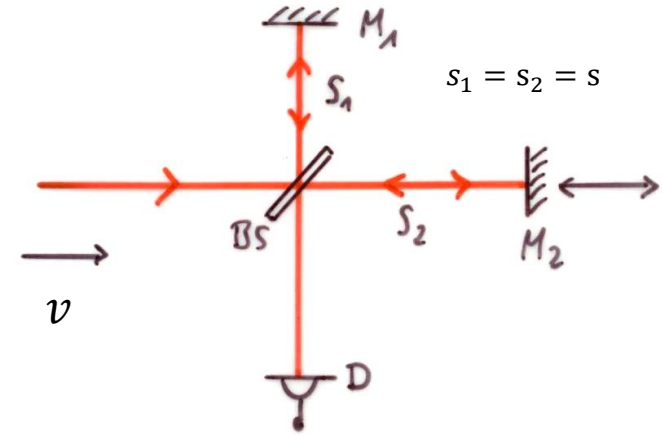
$$t_{\parallel} = \frac{s}{c+v} + \frac{s}{c-v} \approx \frac{2s}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

$$t_{\perp} \approx \frac{2s}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Unterscheiden sich wenn es den Ätherwind (v) gibt

Experiment

Lichtgeschwindigkeit ist in allen Richtungen gleich!



Einsteins Postulate (1905)

- Galilei-Transformationen führen zu Widersprüchen mit der Elektrodynamik
- Es gibt keinen nachweisbaren Effekt eines Äthers
- Einstein in „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“

Einstein'sche Postulate

- 1) **Relativitätsprinzip:** Physikalische Gesetze sind invariant gegen den Wechsel des Inertialsystems
- 2) **Invarianz der Lichtgeschwindigkeit:** Die Vakuumlichtgeschwindigkeit nimmt in jedem Inertialsystem den gleichen Wert an

Herleitung der Lorentz-Transformation

Gesucht: Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen K, K'

- die linear ist (Homogenität des Raumes)
- die das Relativitätsprinzip erfüllt, d.h. kein Inertialsystem ausgezeichnet
- die die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit erhält
- die im Grenzfall niedriger Geschwindigkeiten in die Galilei-Transformation übergeht

Galilei-Transformation

Zwei Koordinatensysteme S , S' , die sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit v zueinander bewegen.

Es gilt $(x, y, z)(t = 0) = (x', y', z')(t = 0)$

Allgemeiner Ansatz: Skalieren Galilei-Trafo mit Faktor $\gamma(v)$

$$(1) \quad x' = \gamma(x - vt)$$

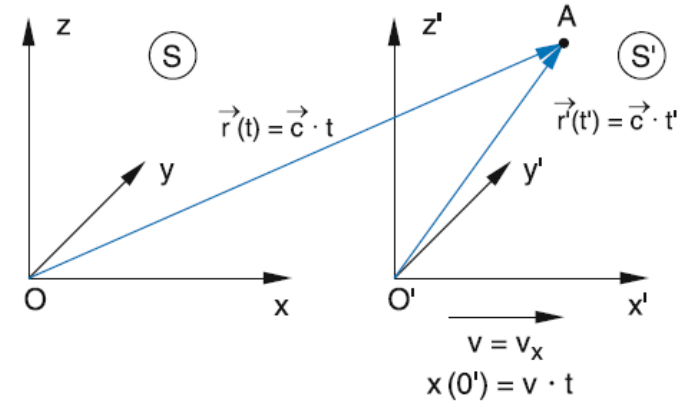
$$(2) \quad x = \gamma(x' + vt')$$

2. Postulat – Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

Betrachte Lichtblitz bei $t = t' = 0, x = 0$

$$x = ct$$

$$x' = ct'$$



Lorentz Transformation

- Einsetzen in (1), (2)

$$(1') \quad x' = ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma(c - v)t$$

$$(2') \quad x = ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c + v)t'$$

- teile beide Gleichungen durch t' , löse (1') nach t/t' auf, setze in (2') ein, löse nach γ auf

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{(c+v)(c-v)} = \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

- Eliminiere x in (1'), (2') und löse nach t auf
- Rücktransformation: $v \rightarrow -v$
- Die y – und z – Koordinaten bleiben unberührt

Lorentz-Transformation

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

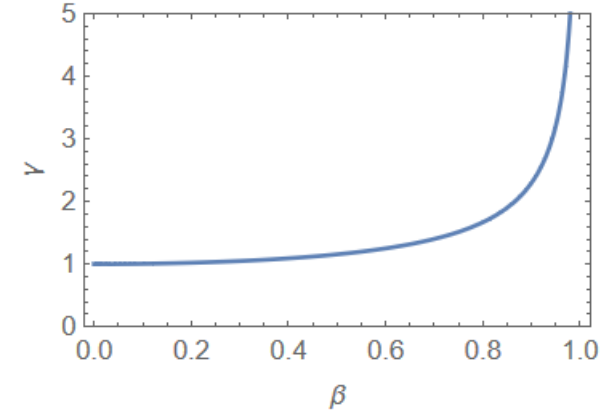
$$t \neq t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

Relativistischer γ Faktor

Relativistischer γ Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- für kleine Geschwindigkeiten nahe bei Eins
- divergiert für $v \rightarrow c$



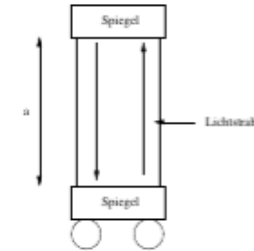
Lorentz-Transformation für „Schub“ (engl. Boost) in x-Richtung

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta \gamma x \\ \gamma x - \beta \gamma ct \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' + \beta \gamma x' \\ \gamma x' + \beta \gamma ct' \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

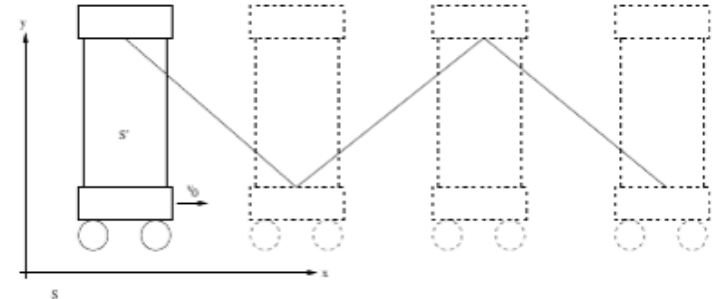
Einfache Berechnung des γ Faktors

- Ein Lichtstrahl wird zwischen zwei parallelen Spiegeln hin und her reflektiert. Das System bewegt sich mit hoher Geschwindigkeit.
- Ein Beobachter der mit der Lichtuhr mitfährt beobachtet die Lichtlaufzeit $t = \frac{2d}{c}$ pro Umlauf
- Ein ruhender Beobachter misst eine längere Umlaufzeit da die Laufstrecke länger ist

(siehe Übungsaufgabe)



„Lichtuhr“



Konsequenzen der Lorentz Transformation

Zeitdilatation (Zeitdehnung)

- Ereignis der Dauer $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ am festen Ort x'_0 in S' betrachtet von S

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{vx'_0}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{vx'_0}{c^2} \right) = \gamma \Delta t'$$

- **Die Zeitdauer in jedem bewegten Bezugssystem ist gedehnt**
- Zeitdauer im ruhenden System ist die kürzest mögliche
- Die Zeit im Ruhesystem eines Objekts nennt man die „Eigenzeit“ Δt_r

$$\Delta t = \gamma \Delta t_r$$

Überraschend, aber vielfach experimentell geprüft

- Lebensdauer von Elementarteilchen (z.B. kosmische Myonen, siehe Übung)
- Gangunterschied von bewegten, hochpräzisen Uhren

Konsequenzen der Lorentz Transformation

Längenkontraktion

- Endpunkte eines Objekts $L' = x'_2 - x'_1$ zur festen Zeit t'_0 in S'
- Messung von x_1 und x_2 zur gleichen Zeit t in S

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \quad \rightarrow \quad L = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\gamma} = \frac{L_r}{\gamma}$$

- **Längen im bewegten Bezugssystem sind verkürzt**
- Die Länge L_r im Ruhesystem ist die längst mögliche
- Die Längenkontraktion ist die Konsequenz der Zeitdilatation

$$L = \frac{L_r}{\gamma}$$

Beispiele

Zusammenhang Längenkontraktion - Zeitdilatation

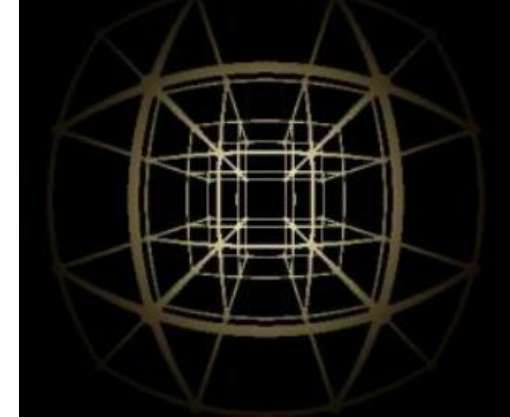
Kosmische Myonen

- Lebensdauer der bewegten Myonen ist im Erdsystem verlängert
- Aus dem Ruhesystem der Myonen erscheint die Strecke zum Boden verkürzt



Veränderte Geometrie bei Bewegung mit hoher Geschwindigkeit

- Längenkontraktion
- Transformierte Lichtlaufzeit



Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

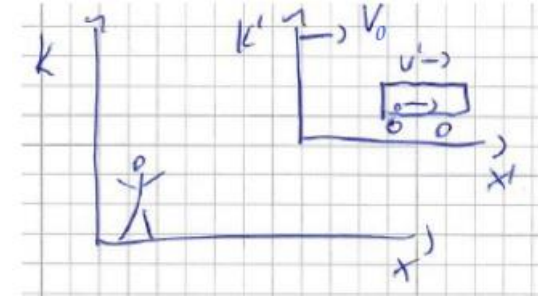
- Differenziere Gleichungen der Lorentz Transformation

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = \gamma(dx' + v_0 dt')$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{v_0 dx'}{c^2}\right)$$

$$v = \frac{\gamma(dx' + v_0 dt')}{\gamma\left(dt' + \frac{v_0 dx'}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v_0}{1 + \frac{v_0 dx'}{c^2 dt'}} = (v' + v_0) \cdot \frac{1}{1 + v' v_0 / c^2}$$



Test: für $v' = c \rightarrow v = c$

Der relativistische Dopplereffekt

- Doppler Effekt in der Akustik: Änderung der Frequenz einer Schallwelle bei bewegter Quelle oder Beobachter relativ zum Medium
- Bei Licht gibt es kein Medium

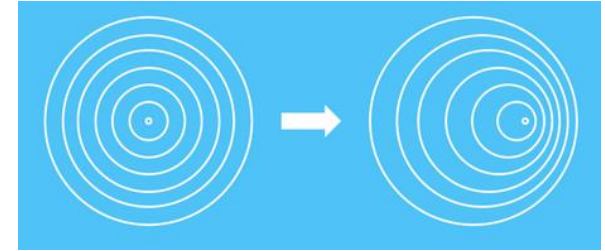
1) Änderung der Wellenlänge (Empfänger E, Quelle Q):

$$\lambda_E = cT_E \pm v_0 T_E, \quad T_E = \frac{1}{f_E}, \quad T_Q = \frac{1}{f_Q}$$

$$f_E = \frac{c}{\lambda_E} = \frac{c}{c \pm v_0} \frac{1}{T_E} = \frac{1}{1 \pm \beta} \frac{f_Q T_Q}{T_E}$$

2) Zeitdilatation $T_E = \gamma T_Q = \frac{T_Q}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\rightarrow f_E = \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}} f_Q$$



Hängt nur von der Relativbewegung zwischen Empfänger und Quelle ab.

Relativistische Mechanik

- Zeit wird bei der Transformation wie eine Koordinate behandelt
→ Fasse Zeit und Ortsvektor zu **Vierervektor** zusammen

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{Indizes: } x_\mu, \quad \mu = 0, \dots, 3$$

- Ein Ortsvektor zeichnet sich dadurch aus dass seine Länge sich bei Drehungen nicht ändert
- Bei Vierervektoren: „Länge“ unter Lorentz Transformation invariant

Der Viererabstand

■ Wichtige Beobachtung

$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$ bei Lorentz-Transformation invariant

■ Definition Vierer Skalarprodukt

$$\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 = c^2(t_1 t_2) - \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$$

$$\tilde{x} \cdot \tilde{x} = x_\mu x^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu$$

weglassen des Summenzeichens: Einstein'sche
Summenkonvention

mit $x_0 = x^0, x_i = -x^i, i = 1..3$

Vierer-Skalarprodukte sind invariant unter Lorentz-Transformation → haben in allen Bezugssystemen den gleichen Wert, Transformation muss oft gar nicht ausgeführt werden

Relativistische Kinematik

- In der Kinematik betrachtet man Geschwindigkeit und Beschleunigung
- Ersetzung der zeitlichen Ableitung durch eine relativistische Invariante, die Ableitung nach der Eigenzeit

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

- Vierergeschwindigkeit

$$\tilde{u} = \frac{d}{d\tau} \tilde{x} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$$

- Viererimpuls

$$\tilde{p} = m \tilde{u} = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma \vec{v} \end{pmatrix}$$

Viererimpuls und Energie

- Was ist $m\gamma c$?
- Ausführen einer Taylor-Entwicklung um $\beta = 0$ für kleines β

$$m\gamma c = (mc^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \dots}_{\text{klass. kinetische Energie}})/c$$

$$\tilde{p} = m\tilde{u} = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

Identifiziere $m\gamma c^2$ als relativistische Gesamtenergie

$$E = mc^2 + E_{kin}$$

$$E_0 = mc^2$$

ist Einsteins berühmte Formel für die Äquivalenz von Masse und Energie - Ruheenergie

Beispiele

Kernmassendefekt (später)

Erzeugung von Teilchen aus kinetischer Energie (später)

Masse, Energie, Impuls

- Interpretiere relativistischen Impuls mit geschwindigkeitsabhängiger relativistischer Masse

$$m_{rel}(v) = m\gamma$$

- Es gilt

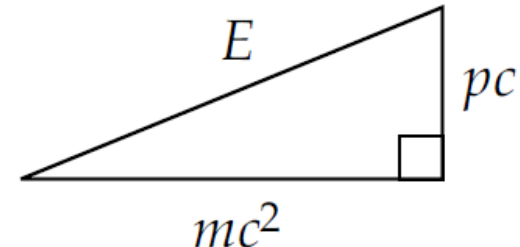
$$E = E_0 + E_{kin} = m_{rel}(v)c^2$$

- Abhängigkeit der Energie von Ruhemasse und relativistischem Impuls

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

- Relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$E = m\gamma c^2 = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \text{ mit } p = m\gamma v$$



Energie und Impuls: Beispiele

- **Klassische Mechanik:** $v \ll c$

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2; p = mv$$

- Die Ruheenergie kann als konstante Nullpunktsenergie weggelassen werden
- Energiezufuhr führt zu Geschwindigkeitszunahme

- **Hochrelativistischer Grenzfall:** $v \approx c$, $m = 0$ oder $E \gg mc^2$

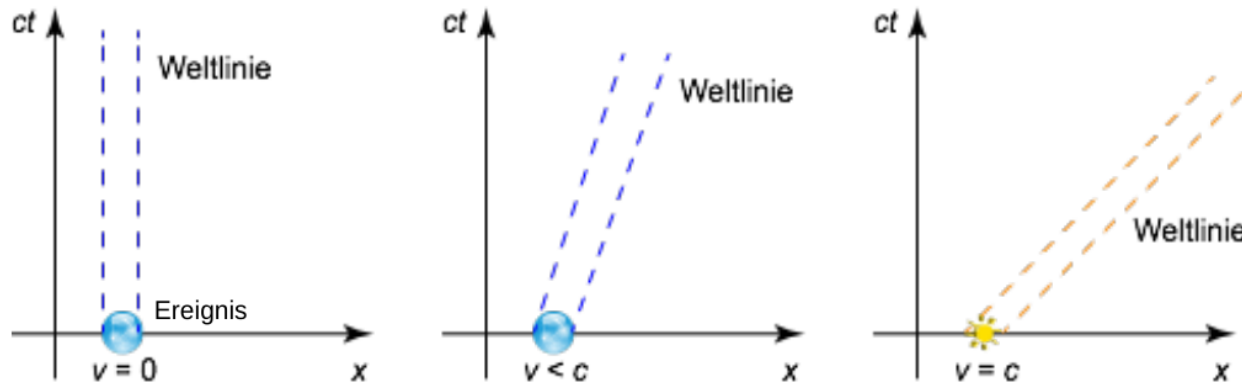
$$E = pc = |\vec{p}|c \quad \text{Ruheenergie vernachlässigbar}$$

- Energiezufuhr führt nicht mehr zu einer Geschwindigkeitszunahme, stattdessen steigt die relativistische Masse
- $v = c$: Relativitätstheorie erlaubt Objekte mit **Ruhemasse Null**
$$E^2 = 0 \cdot c^2 + p^2 c^2 = p^2 c^2, \quad \frac{E}{c} = p$$
- Solche Objekte bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit (z.B. Photon)

Weltlinien und Minkowski-Raum

Da die Zeit wie eine Koordinate behandelt wird, wählt man zur Veranschaulichung eine Darstellung bei der die Zeit auf der vertikalen Achse gegen eine Raumkoordinate aufgetragen wird

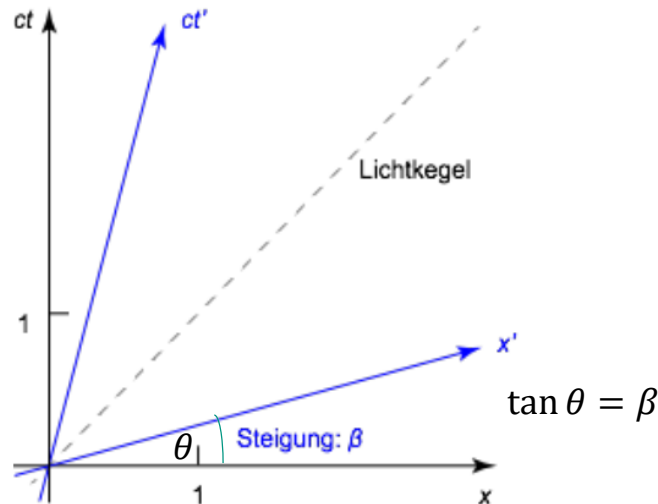
→ Minkowski Darstellung



Hermann Minkowski

Weltlinien und Minkowski Raum

- Darstellung verschiedener Inertialsysteme
- Problem Gleichzeitigkeit: Ereignisse, die ein Beobachter als gleichzeitig empfindet, finden für einen anderen Beobachter zu verschiedenen Zeiten statt
 - Achsen ct und ct' können nicht parallel sein



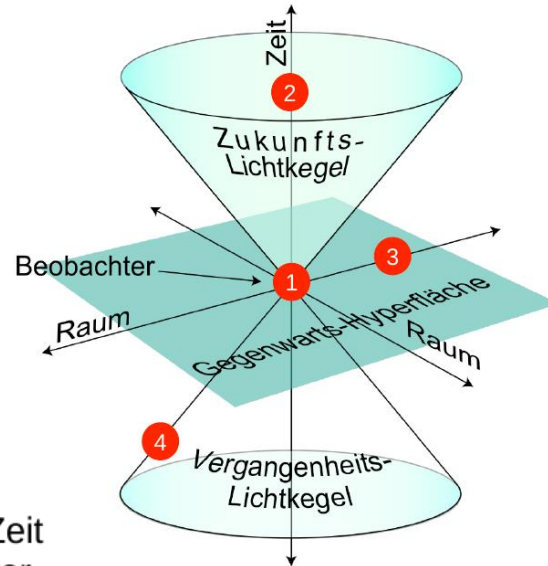
Über Lorentz-Transformation
wird die Einheitslänge U auf
 x' - oder ct' -Achse skaliert:

$$U' = \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Mit dem Minkowski-Diagramm
führt man Lorentz-Transformationen grafisch aus
→ Anwendung im Schulunterricht

Weltlinien und Minkowski Raum

Vergangenheit und Zukunft im Minkowski Diagramm



- 1 → 2 zeitartig
- 1 → 3 raumartig
- 1 → 4 lichtartig

Raumartige Abstände: gegenwärtig
keine kausale Verbindung zwischen
Ereignissen möglich.

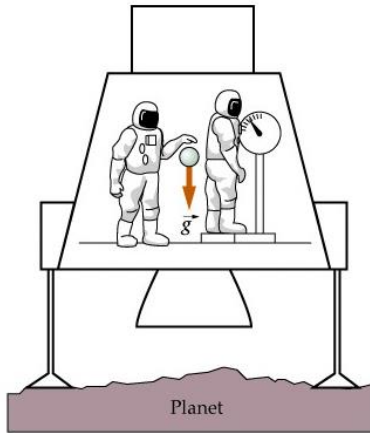
$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^2$$

Lorentz-invarianter Raum-Zeit
Abstand: Für alle Beobachter
gleich.

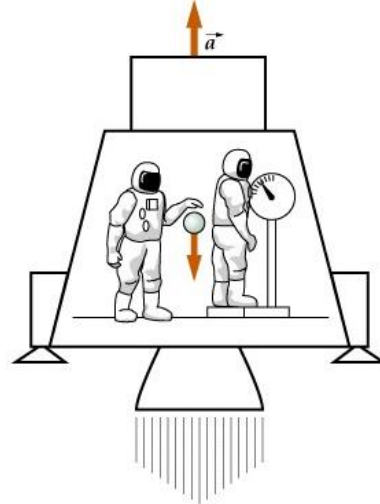
Ausblick: Allgemeine Relativitätstheorie

Einsteins Idee:

Physikalische Prozesse im Schwerfeld eines Planeten sind nicht unterscheidbar von Prozessen in einem beschleunigten System



Rakete im
Gravitationsfeld



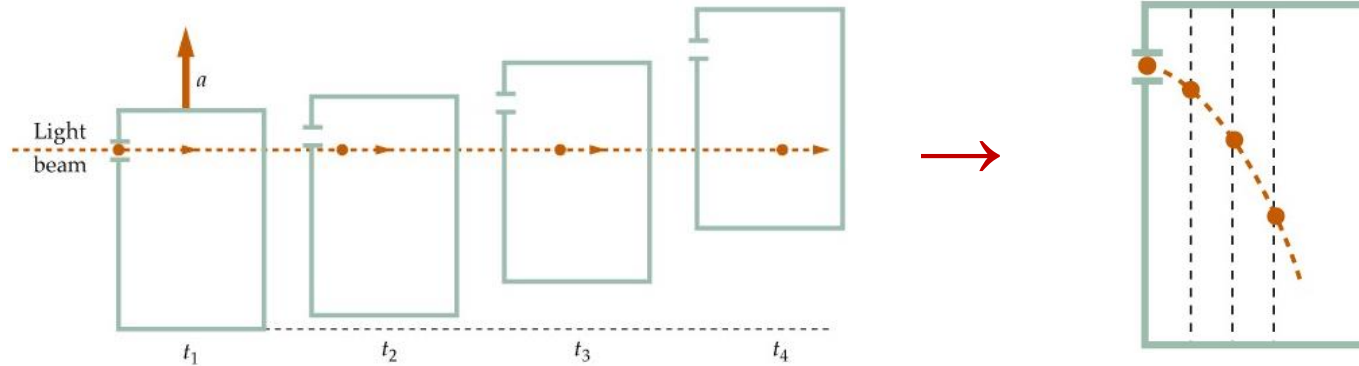
Rakete
beschleunigt

Äquivalenzprinzip:

Ein homogenes Gravitationsfeld ist einem beschleunigten System äquivalent

Allgemeine Relativitätstheorie

Lichtstrahl beobachtet in einem beschleunigten Kasten



→ **Licht müsste auch im Gravitationsfeld abgelenkt werden**

Dieser Effekt ist tatsächlich aus der Astronomie bekannt.

ART: Schwarze Löcher

- Eine Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie sind „Schwarze Löcher“
- zufällig liefert eine klassische Rechnung das richtige mit der ART kompatible Resultat
- Berechne die **Fluchtgeschwindigkeit** v_F , die ein Objekt braucht, um dem Gravitationspotential zu entkommen:

$$V_G(r) = \frac{GMm}{R}; E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} > 0 \Rightarrow v > v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Wenn $v_F > c$ kann nicht einmal Licht entkommen,

Wenn es näher als $R_S = 2GM/c^2$ an eine Gravitationsquelle herankommt

R_S Schwarzschildradius

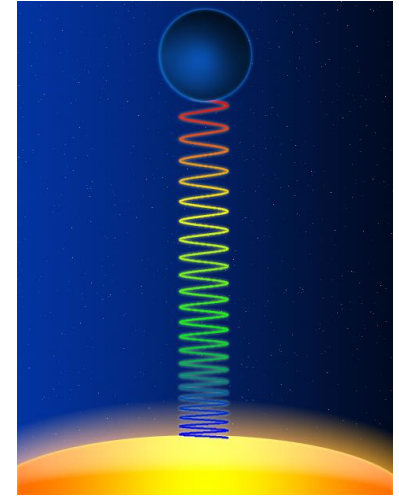
ART: gravitative Zeitdilatation

Eine weitere Konsequenz der ART ist, dass Uhren in **starken Gravitationsfeldern langsamer** gehen:

$$dt(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}} d\tau$$

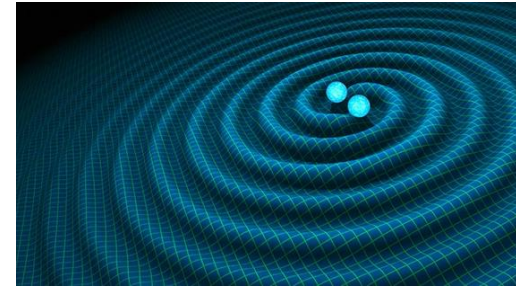
- Die Zeitdilatation führt zu einer Änderung der Periodendauer von Lichtwellen
- Sie erscheinen mit kleiner werdendem Gravitationspotential ins Rote verschoben

Die gravitative Zeitdilatation ist – neben der durch die Relativbewegung verursachten relativistischen Zeitdilatation – relevant für Satelliten-basierte Navigation (GPS).



ART aktuell: Gravitationswellendetektoren

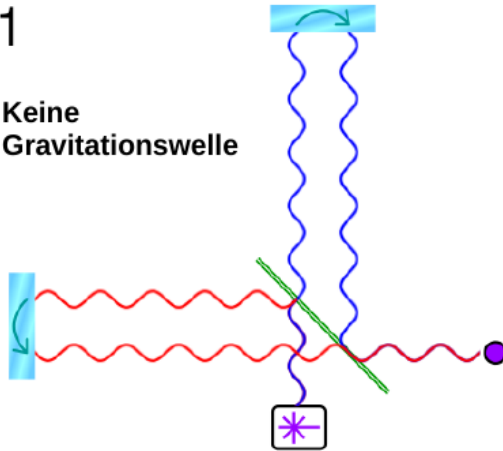
Eine der Vorhersagen der ART ist, dass es „**Gravitationswellen**“, also wellenförmige Verzerrungen der Raumzeit geben sollte.



Messprinzip: genaue Messung der Länge der beiden Interferometerarme.

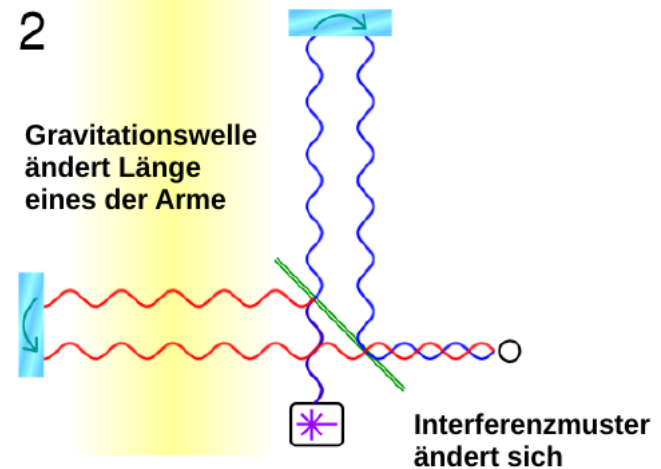
1

Keine
Gravitationswelle



2

Gravitationswelle
ändert Länge
eines der Arme



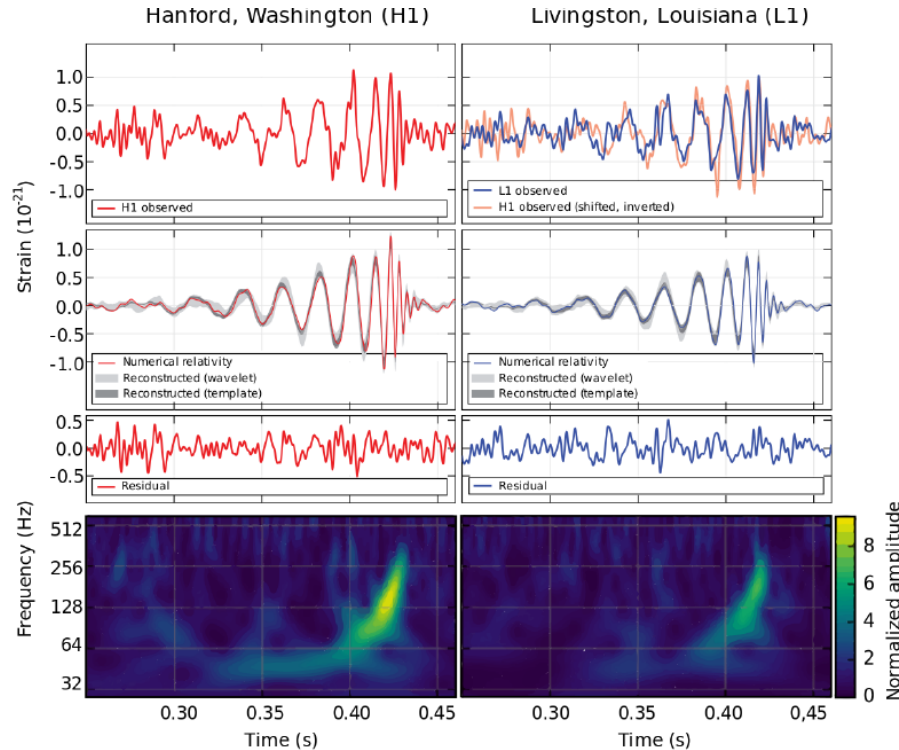


- 4km Armlänge
- 200W Laserleistung
- Messung von relativen Längenänderungen von

$$\frac{\Delta L}{L} = 10^{-22}$$

Äquivalent zur Messung des Abstandes Sonne – Alpha Centauri (10^{13} km) mit einer Genauigkeit von weniger als der Breite eines Haares

LIGO: Messung von Gravitationswellen



**LIGO Kollaboration:
Beobachtung der
Kollision zweier
schwarzer Löcher.**

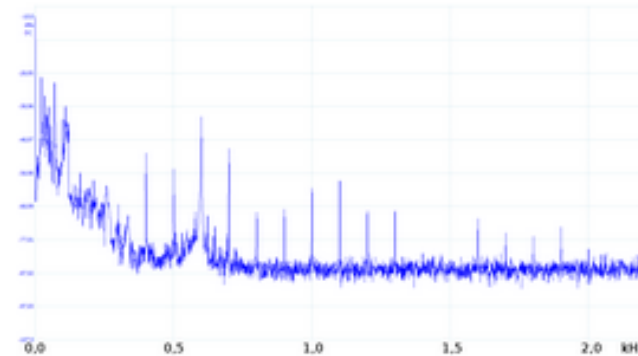
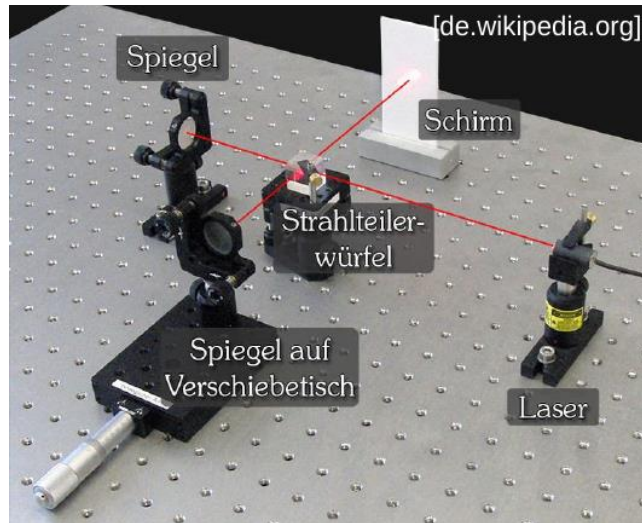
**2017: Nobelpreis für
Rainer Weiss, Barry
Barish and Kip Thorne**

**"for decisive
contributions to the
LIGO detector and the
observation of
gravitational waves"**

[Wikipedia]

Warped space-time around colliding black holes

Analogieversuch im Schülerlabor



für besonders Interessierte (max. 6 Schüler/innen)
zum [Physik-Nobelpreis 2017](#) :

[Analogieversuch zur Detektion von Gravitationswellen](#)

(geeignet für K2)

[Link zum Schülerlabor Physik](#)