

3. Atomphysik

Prof. David Hunger

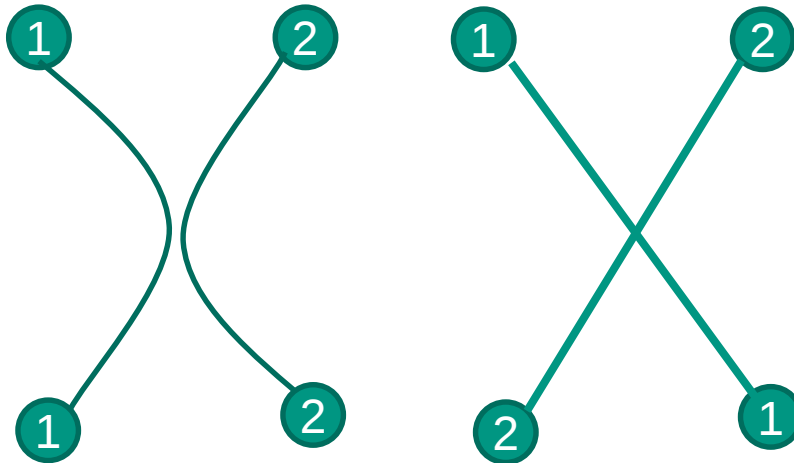
Physikalisches Institut, KIT Fakultät für Physik

3.6 Zwei-Teilchen Systeme

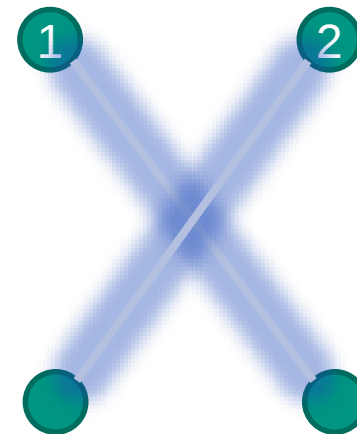
Ununterscheidbarkeit

Prinzip: Quantenteilchen der gleichen Sorte sind ununterscheidbar

- Bsp: Zwei Teilchen stoßen mit 50% Stoßwahrscheinlichkeit



In der **klassischen Physik** erlaubt die Verfolgung der Teilchenbahnen, zu entscheiden, ob Teilchen 1 links oder rechts angekommen ist.



In der **Quantenphysik** sind die Bahnen verschmiert; es ist nicht zu entscheiden, wo sich Teilchen (1) bzw. (2) am Ende befinden.

Zwei Teilchen im Kasten

Beispiel

- Zwei nicht miteinander wechselwirkende Teilchen im Kasten
- Gemeinsame Wellenfunktion $\psi(x_1, x_2, t)$
- Löse stationäre Schrödinger Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + V(x_1, x_2) \right] \psi(x_1, x_2, t) = E \psi(x_1, x_2, t)$$

mit $V = 0$ im Kasten

- Produktansatz: $\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2)$

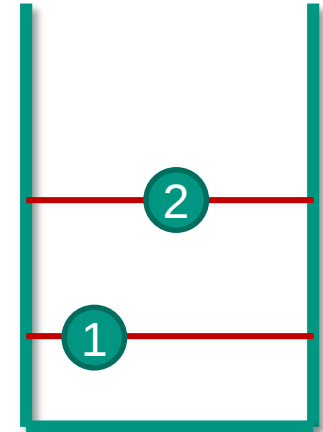
$$\rightarrow \psi_{n,m}(x_1, x_2) = \psi_n(x_1)\psi_m(x_2)$$

$$\text{z.B. } \psi_{1,2} = A \sin\left(\frac{\pi x_1}{l}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{l}\right)$$

- Teilchen 1 im Zustand 1, Teilchen 2 im Zustand 2

$$\langle x_1 \rangle = \int x_1 |\psi_{1,2}(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = \int x_1 |\psi_1(x_1)|^2 dx_1$$

$$\langle x_2 \rangle = \int x_2 |\psi_{1,2}(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = \int x_2 |\psi_2(x_2)|^2 dx_2$$



Teilchen
unterscheidbar!

Ununterscheidbare Teilchen

- Ununterscheidbarkeit bedeutet

$$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2 \rightarrow \text{kein Unterschied bei Teilchenaustausch}$$

- S.G. ist eine lineare DGL $\rightarrow$ Linearkombinationen von Lösungen sind auch Lösungen, Superpositionsprinzip
- Bilde Linearkombinationen: Zwei Möglichkeiten

$$\psi_{n,m}^S(x_1, x_2) = A[\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) + \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)]$$

$$\psi_{n,m}^A(x_1, x_2) = A[\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) - \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)]$$

$\psi_{n,m}^S(x_1, x_2) = + \psi_{n,m}^S(x_2, x_1)$	symmetrisch	bei Teilchenaustausch
$\psi_{n,m}^A(x_1, x_2) = - \psi_{n,m}^A(x_2, x_1)$	antisymmetrisch	

Pauli Prinzip, Bosonen & Fermionen

- Bemerkenswert: $\psi_{n,n}^A(x_1, x_2) = 0!$

Pauli Prinzip

Zwei Teilchen, die durch eine bei Teilchenaustausch antisymmetrische Wellenfunktion beschrieben werden können nicht im gleichen Zustand sein!

- Es gibt in der Natur zwei unterschiedliche Sorten Teilchen

Bosonen haben symmetrische Wellenfunktion

ganzzahliger Spin: $S = 0, 1, 2, \dots$

z.B. Photonen, manche Atome

Fermionen haben antisymmetrische Wellenfunktion

halbzahliger Spin: $S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

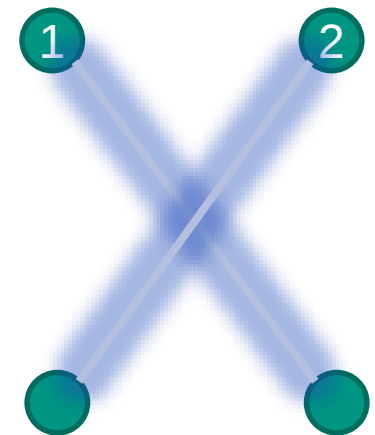
für sie gilt das Pauli Prinzip

Z.B. Elektron, Proton, Neutron, Quarks, manche Atome

Verschränkung

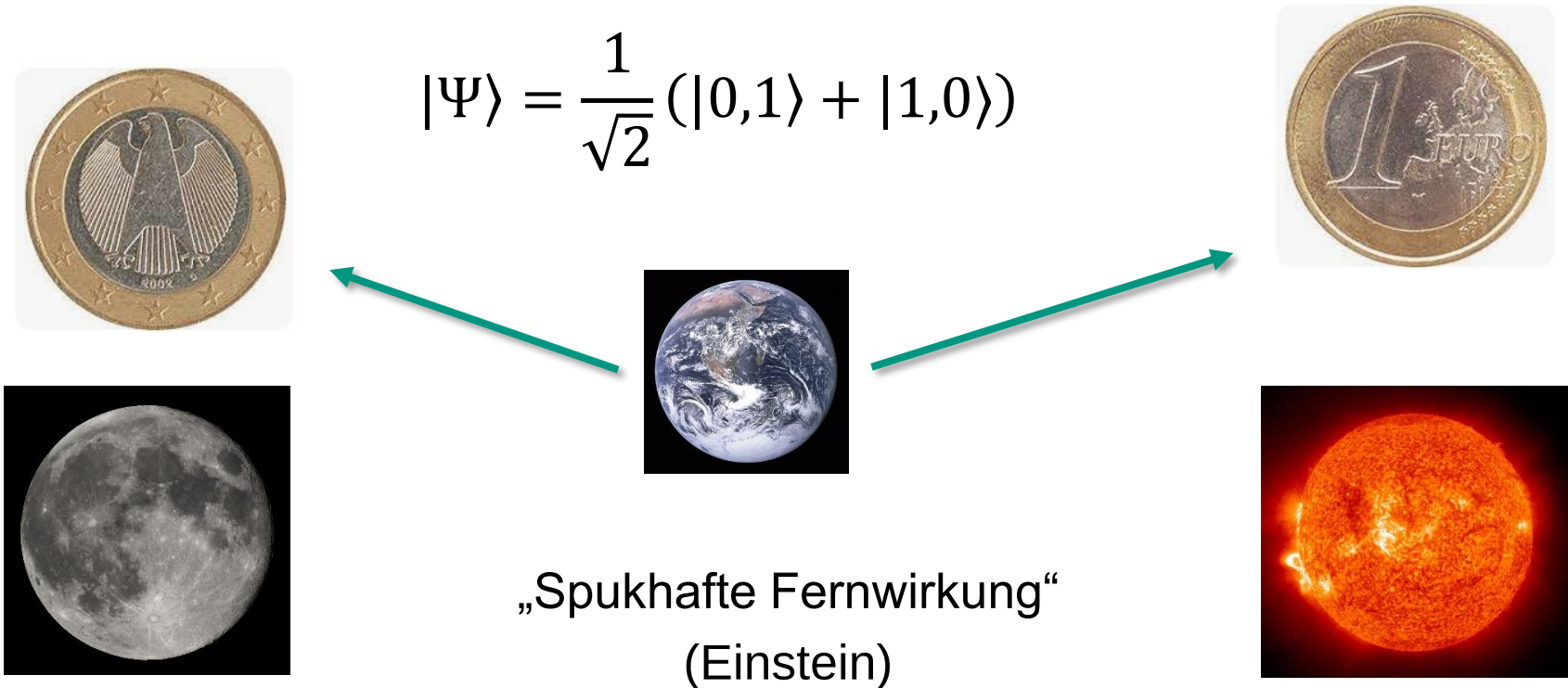
- Die Zustände $\psi^S(x_1, x_2)$ und $\psi^A(x_1, x_2)$ sind verschränkte Zustände
- Verschränkung ist ein zentrales Quantenphänomen, kein Pendant in der klassischen Physik
- Entstehen, wenn zwei Systeme Wechselwirken und es mehrere Endzustände gibt
- Z.B. Teilchen nach Stoß
 - 1) Teilchen (1) links, (2) rechts $\psi_1 = |l, r\rangle$
 - 2) Teilchen (1) rechts, (2) links $\psi_2 = |r, l\rangle$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|l, r\rangle + |r, l\rangle)$$



Verschränkung

gemeinsamer Zustand wohl bestimmt
 einzelne Zustände vollkommen unbestimmt



Schrödingers Katze

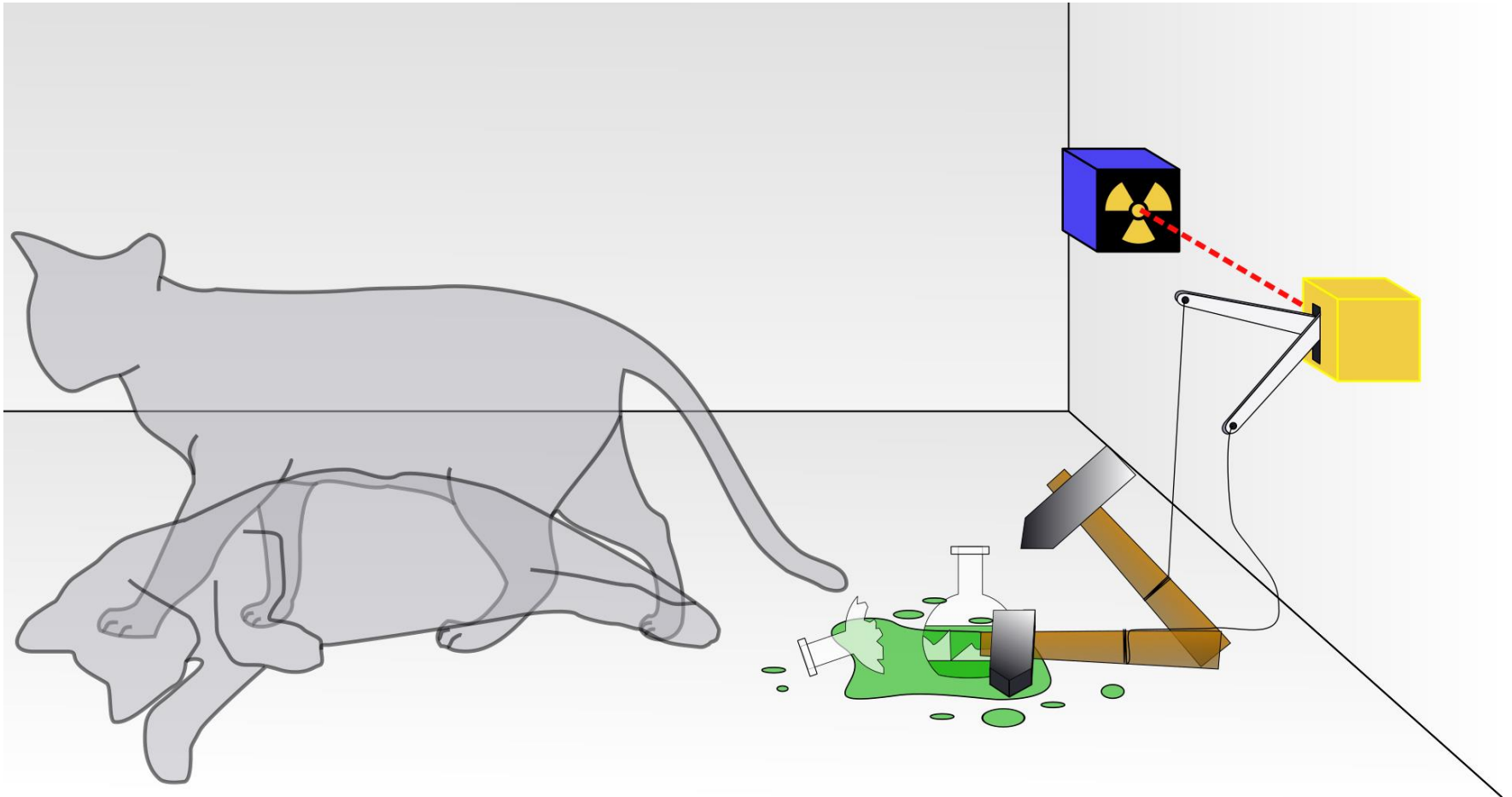


Bild: Wikipedia

Schrödingers Katze

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\text{cat sitting}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{cat dead}\rangle$$

Bild: Internet

Messung

Es kann nur $\left\{ \begin{array}{l} |0\rangle \text{ oder } |1\rangle \\ | \text{cat} \rangle \text{ oder } | \text{dead} \rangle \end{array} \right\}$ gemessen werden

Messergebnis: Einzelmessung zufällig, viele Messungen:

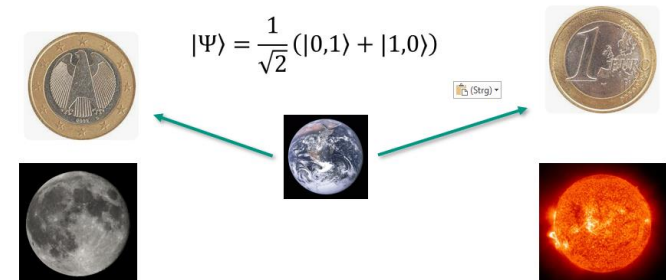
- $|0\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|\alpha|^2$
- $|1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|\beta|^2$

Messung zerstört Überlagerung!

Versteckte Parameter – ist die QM richtig?

Klassisches Bild ist im Widerspruch zu Verschränkung

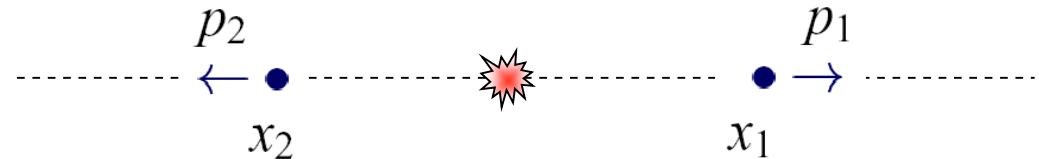
- Nimmt man eine Messung auf dem Mond (2) vor wird gleichzeitig auch der Zustand auf der Sonne (1) festgelegt
- Widerspricht der maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen mit Lichtgeschwindigkeit



„Vermeidung des Problems“

- Die QM könnte unvollständig sein, der Zufall könnte durch versteckte Parameter verursacht sein.
- Dann wäre für jede erdenkliche Messsituation den Zuständen das Ergebnis vorgeschrieben – der zufällige Ausgang einer Messung an (2) und die Rückwirkung auf (1) wäre vermieden

Das Einstein-Rosen-Podolski (EPR) Paradoxon



Gedankenexperiment von EPR

- Betrachte Ort und Impuls zweier verschränkter Teilchen in großem Abstand
- Messe Impuls an Teilchen (2) $\rightarrow$ Ortsunschärfe von Teilchen 2
- Was passiert mit Teilchen (1)?
- QM: (1) hat ebenfalls scharfen Impuls, unscharfen Ort
- Alternativ: Messe Ort an Teilchen (2) $\rightarrow$ (1) ebenfalls ortsscharf
- Für eine **lokale realistische Theorie**: Messung in zwei raumartig getrennten Punkten können sich nicht beeinflussen

EPR

- Es kann keine „spukhafte Fernwirkung“ mit Überlichtgeschwindigkeit geben, QM muss falsch oder unvollständig sein
- $\rightarrow$ Information über die jew. Messergebnisse muss vorher festgelegt sein, versteckte Variablen

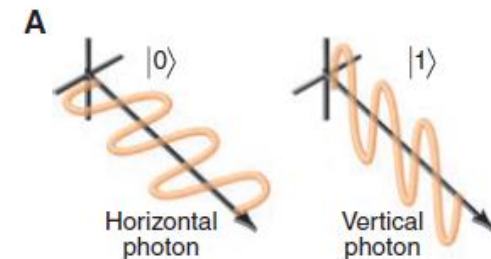
Experimentelle Überprüfung mit Photonen

- Messung von Ort und Impuls nicht genau genug möglich
- Alternative: Polarisationszustände von einzelnen Lichtquanten
- Horizontale und vertikale Polarisation

$$|H\rangle = |0\rangle = |\rightarrow\rangle, \quad |V\rangle = |1\rangle = |\uparrow\rangle$$

- Diagonale Polarisation $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$

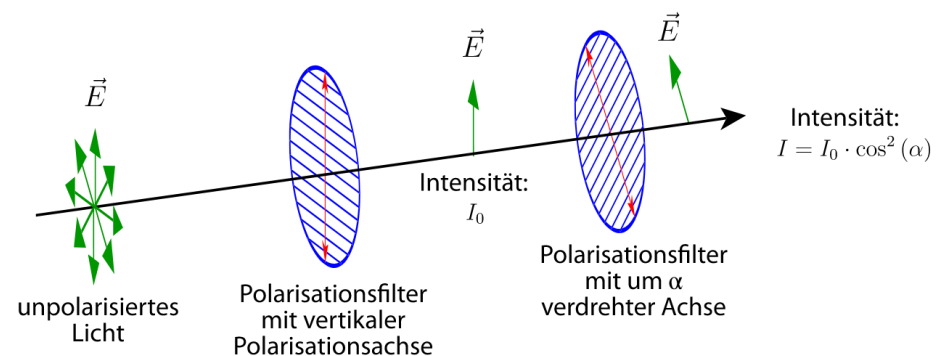
- Arbiträre Polarisation $|\psi\rangle = \cos \alpha |H\rangle + \sin \alpha |V\rangle$



Präparation mit Polarisator

- Transmission linearer Polarisation durch gedrehten Polarisator

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$



Teilchenbild

- Photon transmittiert mit Wahrscheinlichkeit

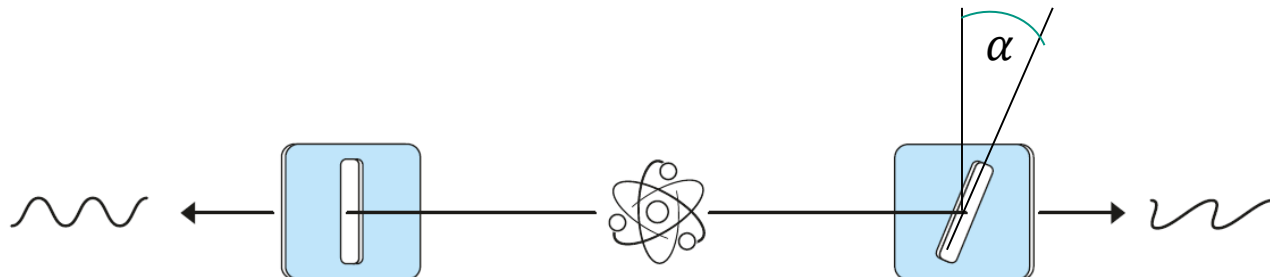
$$w = \cos^2 \alpha$$

Polarisationsverschränkte Photonen

■ Verschränktes Photonenpaar

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, H\rangle + |V, V\rangle)$$

- Erzeugung in zufälliger Orientierung, d.h. absoluter Winkel unbekannt
- Analysiere mit zwei Polarisationsfiltern mit drehbaren Achsen α
- Zähle Anzahl transmittierter Photonenpaare



Polarisationsverschränkte Photonen

1) Quantenmechanisch

- Polarisationszustand bis zur Messung unbestimmt
- Messung legt Wellenfunktion des Gesamtsystems fest

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, H\rangle + |V, V\rangle) \rightarrow |\psi\rangle = |H, H\rangle \text{ oder } |V, V\rangle$$

- Unbekannte absolute Orientierung: „erstes“ Photon wird mit

$$w = \frac{1}{2} \text{ transmittiert}$$

- Gleichzeitig wird zweites Photon in der gleichen Richtung polarisiert
- Transmittiert durch zweiten Polarisator mit

$$w = \cos^2(\Delta\alpha) \text{ mit } \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

- Insgesamt:

$$w_{QM}(\Delta\alpha) = \frac{1}{2} \cos^2(\Delta\alpha)$$

Polarisationsverschränkte Photonen

2) Theorie mit verborgenen Parametern

- Polarisationszustand von vornherein festgelegt, aber unbekannt
- Annahme: Es existieren festgelegte Polarisationswinkel $\phi_1, \phi_2 = \phi$
- Transmissionswahrscheinlichkeit für einzelnes Photon

$$w = \cos^2(\alpha - \phi)$$

- Für beide

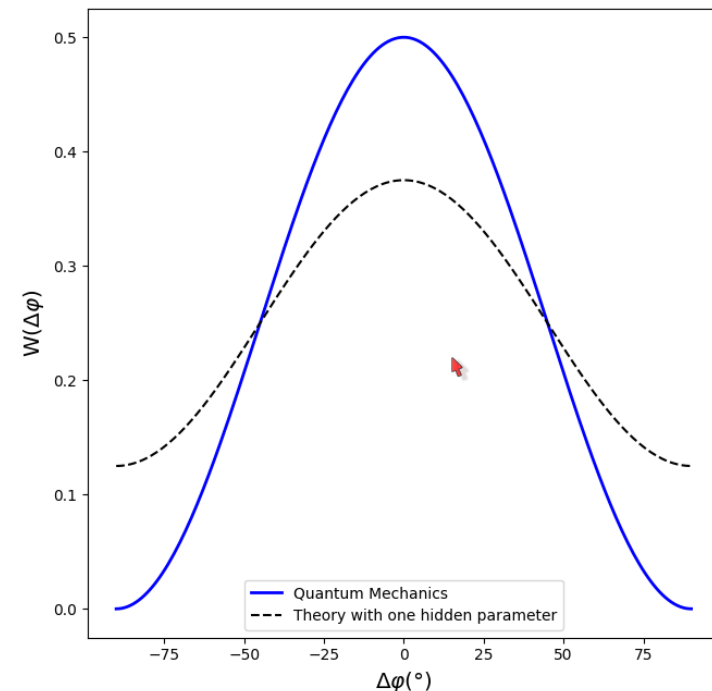
$$w = \cos^2(\alpha_1 - \phi) \cos^2(\alpha_2 - \phi)$$

- Kenne Richtung von ϕ nicht

→ integriere über alle Winkel

$$w_{vP}(\Delta\alpha) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \cos^2(\Delta\alpha) \right)$$

**Experimente bestätigen
die Quantenmechanik!**



Bell'sche Ungleichung

John Bell, 1964

Allgemeine Aussage für maximal erreichbare Korrelationen für lokal-realistische Theorien

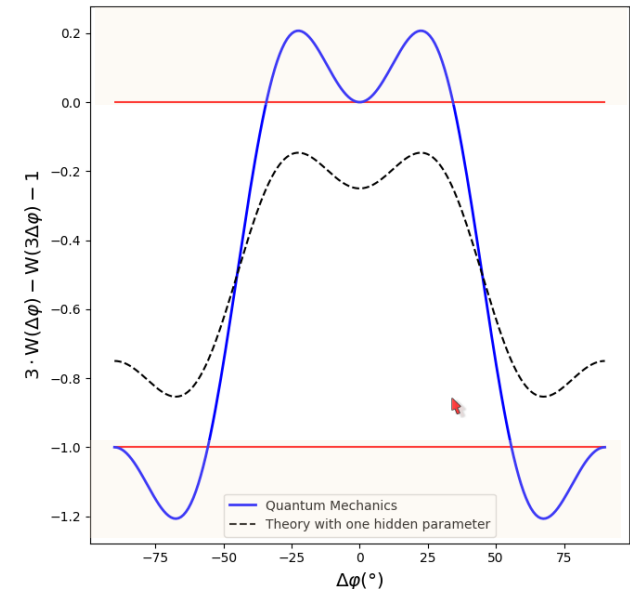
Lokal: Ein System kann nicht durch raumartig getrennte Ereignisse beeinflusst werden

Realistisch: Physikalische Eigenschaften eines Systems die eindeutig vorhersagbar sind haben ein entsprechende physikalische Realität (Polarisationswinkel existiert, wenn er vorhergesagt werden kann)

Für Photon Polarisation findet man

$$-1 \leq 3 \cdot w(\Delta\alpha) - w(3\Delta\alpha) - 1 \leq 0$$

Quantenmechanik erreicht höhere Werte



**Konsequenz:
Die Welt ist nicht-lokal!**