Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Kernphysik

Musterlösung zur 1. Klausur zur Vorlesung

Moderne Physik für Lehramtskandidaten, Geophysiker, Meteorologen und Ingenieurpädagogen

Prof. Dr. U. Husemann, Dr. M. Niegel

Sommersemester 2012
31. Juli 2012

Aufgabe 1: Kurzfragen (40 Punkte)

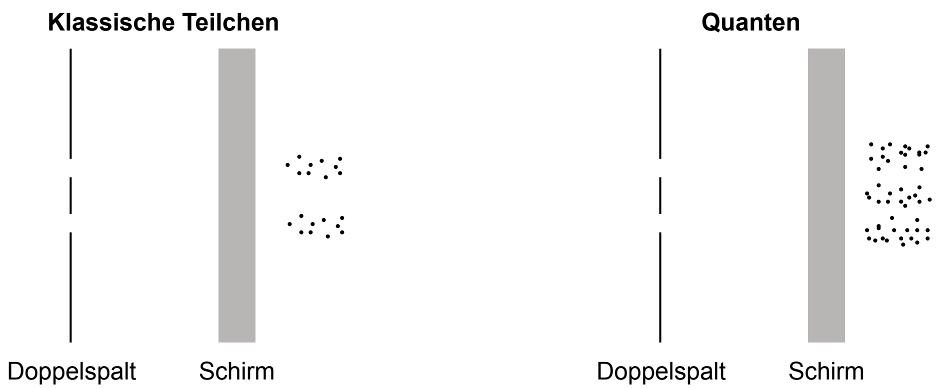
a) Wie lauten die beiden Postulate der speziellen Relativitätstheorie?

- *Relativitätsprinzip: dieselbe Physik in allen Inertialsystemen.*
- *Universelle Grenzgeschwindigkeit c.*

b) Warum gibt es für den lichtelektrischen Effekt eine Minimalfrequenz des einfallenden Lichts, unterhalb derer keine Elektronen ausgelöst werden können?

Grundlage für die Erklärung ist die Quantennatur des Lichts. Die Energie der einfallenden Lichtquanten muss oberhalb der Austrittsarbeit liegen. Mit $E = \hbar\omega$ ergibt sich daraus eine Minimalfrequenz. Klassisch würde man keine Grenzfrequenz erwarten, da mit genügend hoher Intensität immer Elektronen ausgelöst werden können.

c) Skizzieren Sie den Intensitätsverlauf hinter einem Doppelspalt, auf den von links ein paralleler Strahl klassischer Teilchen trifft. Was ändert sich, wenn der Strahl aus Elektronen besteht?

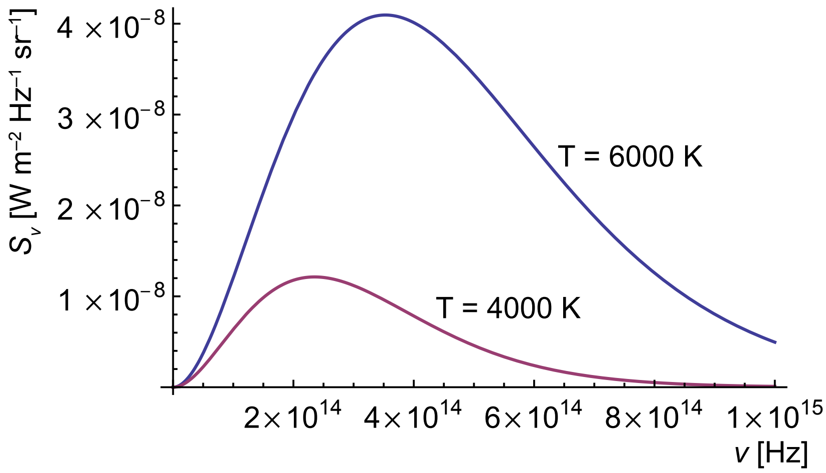


- *In beiden Fällen: diskrete Counts auf dem Schirm.*
- *Klassische Teilchen: Häufigkeitsverteilung wie bei zwei Einzelspalten.*
- *Elektronen sind quantenmechanische Teilchen: Häufigkeitsverteilung wie bei Interferenz am Doppelspalt.*

d) Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung für ein freies Teilchen in drei Raumdimensionen?

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad \textit{mit} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2$$

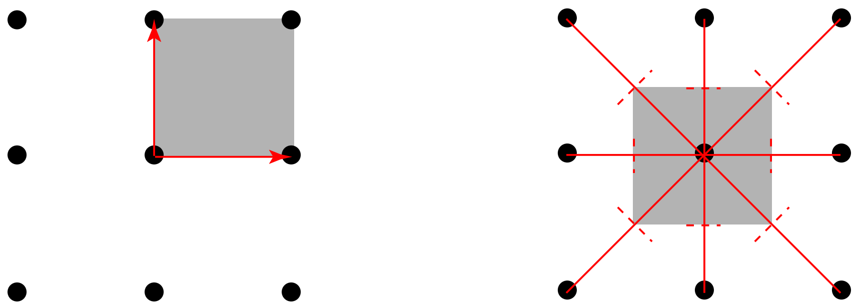
e) Skizzieren Sie qualitativ ein Schwarzkörperspektrum, d. h. die spektrale Strahlungsdichte S_ν als Funktion der Frequenz ν, für eine Temperatur T_1 und für eine Temperatur $T_2 > T_1$.



Lösung sollte folgende Elemente enthalten:

- *Korrektes Abfallen auf Null für hohe und niedrige Frequenzen.*
- *Höhere Temperatur T_2: Maximum von S_ν höher und zu höheren Frequenzen verschoben.*

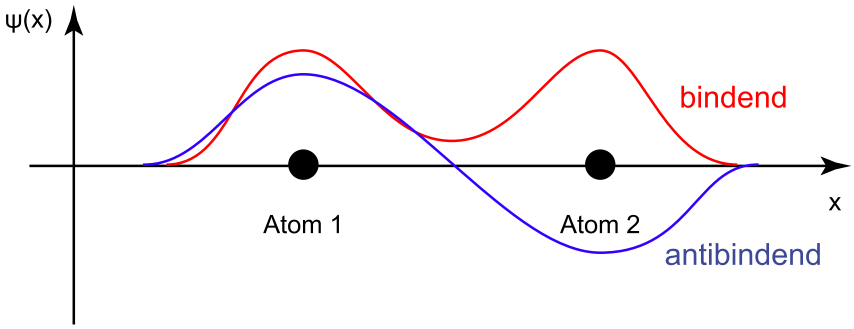
f) Skizzieren Sie die primitive Elementarzelle und ihre Basisvektoren sowie die erste Brillouinzone eines rechtwinkligen zweidimensionalen Gitters.



primitive Elementarzelle

1. Brillouinzone

g) Skizzieren Sie die bindende und die antibindende Wellenfunktion bei einer kovalenten Bindung.



h) Wie unterscheidet man Isolatoren und Leiter im Bändermodell?

- *Isolatoren: große Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband. Fermienergie liegt in der Bandlücke.*
- *Leiter: Fermienergie liegt im Leitungsband oder Valenzband und Leitungsband überlappen.*

i) Da eine der vier bekannten Grundkräfte, die Gravitation, im Mikrokosmos keine Rolle spielt, werden im Standardmodell der Teilchenphysik die Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen durch die verbleibenden drei Grundkräfte beschrieben. Benennen Sie die drei Kräfte und geben Sie die diesen Kräften zugeordneten Austauschteilchen an.

- *Elektromagnetische Kraft: Photon*
- *Starke Kraft: Gluon (genauer: 8 Gluonen)*
- *Schwache Kraft: W- und Z-Bosonen (eigentlich: nur $W^{\pm}$-Bosonen)*
- *(elektroschwache Wechselwirkung: Photon, $W^{\pm}$-Bosonen, Z-Boson)*

j) Aus welchem Typ Elementarteilchen sind Mesonen und Baryonen aufgebaut? Wodurch unterscheidet sich ihr Aufbau?

- *Beide sind aus (Anti-)Quarks aufgebaut (Fermionen)*
- *Mesonen: Quark + Antiquark*
- *Baryonen: 3 Quarks*

Aufgabe 2: Relativität (20 Punkte)

Der uns nächste Stern mit einem Planeten ist Epsilon Eridani. Er liegt 10 Lichtjahre von der Erde entfernt. Ein bemanntes Raumschiff fliegt von der Erde mit 75% der Lichtgeschwindigkeit zu Epsilon Eridani.

a) Wie lange ist die Strecke im System der Raumfahrerin?

Für den Beobachter im bewegten System gilt Längenkontraktion: $S' = \frac{S}{\gamma}$

Streckenlänge S:
$S = c \cdot 10\,\mathrm{a} = 3 \cdot 10^8 \cdot 10 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \frac{\mathrm{ms}}{\mathrm{s}} = 9.46 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$

Lorentzfaktor γ*:*
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.75)^2}} \simeq 1.52$

Streckenlänge S' *im System der Raumfahrerin:*
$S' = \frac{S}{\gamma} = 6.23 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$

b) Wie lange braucht die Raumfahrerin für die Reise aus ihrer eigenen Sicht?

Die Dauer der Reise ergibt sich aus:
$t = \frac{S'}{v} = \frac{S'}{0.75 \cdot c} = \frac{6.23 \times 10^{16}\,\mathrm{m}}{0.75 \cdot 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}} = 2.77 \times 10^8\,\mathrm{s} = 8.78\,\mathrm{a}$

c) Wie lange braucht sie aus Sicht ihrers Zwillingsbruders, die auf der Erde geblieben ist?

Dauer t der Reise: $v = \frac{S}{t} \rightarrow t = \frac{S}{v} = \frac{S}{0.75 \cdot c} = \frac{9.46 \times 10^{16}\,\mathrm{m}}{0.75 \cdot 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}} = 4.20 \times 10^8\,\mathrm{s} = 13.32\,\mathrm{a}$

Alternativ kann t auch einfach über $4/3 \cdot 10\,\mathrm{a} = 13.33\,\mathrm{a}$ *bestimmt werden.*

d) Das Raumschiff kehrt von Epsilon Eridani mit derselben Geschwindigkeit zur Erde zurück. Um wieviel ist nach obiger Rechnung die Raumfahrerin jünger als ihr Zwillingsbruder? Wie lässt sich dieses „Zwillingsparadoxon“ auflösen?

Die Gesamtdauer der Reise beträgt von der Erde aus gesehen $2 \cdot 4/3 \cdot 10\,\mathrm{a} = 26.66\,\mathrm{a}$*. Im Ruhesystem der Raumfahrerin dauert die Reise nur* $2 \cdot 8.78\,\mathrm{a} = 17.56\,\mathrm{a}$*, sie wäre also* $9.1\,\mathrm{a}$ *jünger als ihr Zwillingsbruder. Das Paradoxon kann wie folgt gelöst werden: Die Rechnung ist nur für Inertialsysteme korrekt. Beim Start auf der Erde sowie bei der Rückkehr wird das Raumschiff beschleunigt und befindet sich somit nicht mehr in einem Inertialsystem. Dabei kommt es nicht auf die Dauer der Beschleunigung an, sondern auf den Wechsel des Inertialsystems zwischen Hin- und Rückflug.*

Aufgabe 3: Wasserstoffatom (20 Punkte)

a) Geben Sie den Zusammenhang zwischen Energieniveaus E_n und Hauptquantenzahl n beim Wasserstoffatom an.

Für Hauptquantenzahl n gilt für die Energieniveaus E_n:
$E_n = -13.6\,\text{eV} \cdot \frac{1}{n^2}$ *(Angabe mit Rydbergenergie genügt)*

Alternativ: $E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2} \cdot \frac{1}{n^2}$

b) Geben Sie für ein Gas aus Wasserstoffatomen bei Zimmertemperatur ($T = 300\,\text{K}$) das Besetzungsverhältnis der Atome im ersten angeregten Zustand E_2 zu denen im Grundzustand E_1 an. Nehmen Sie dafür an, dass die beiden Niveaus den gleichen Entartungsgrad haben.

Besetzungsverhältnis gegeben durch Boltzmann-Verteilung: $\frac{N_i}{N_j} = e^{-\frac{E_i - E_j}{k_B T}}$
Bei Raumtemperatur gilt $k_B T = 0.026\,\text{eV}$

Energien der Niveaus:
$E_1 = -13.6\,\text{eV} \cdot \frac{1}{1^2} = -13.6\,\text{eV}$
$E_2 = -13.6\,\text{eV} \cdot \frac{1}{2^2} = -3.4\,\text{eV}$

Besetzungsverhältnis: $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_b T}} = e^{-\frac{10.2\,\text{eV}}{0.026\,\text{eV}}} = 4.2 \times 10^{-171}$

c) Elektronen mit einer kinetischen Energie von $10\,\text{eV}$ treffen auf ein Gas aus Wasserstoffatomen. Erklären Sie, warum die Wasserstoffatome im Grundzustand von den Elektronen nicht angeregt werden können.

Energieniveaus:
$E_1 = -13.6\,\text{eV} \cdot \frac{1}{1^2} = -13.6\,\text{eV}$
$E_2 = -13.6\,\text{eV} \cdot \frac{1}{2^2} = -3.4\,\text{eV}$
$E_3 = -13.6\,\text{eV} \cdot \frac{1}{3^2} = -1.51\,\text{eV}$
$E_4 = -13.6\,\text{eV} \cdot \frac{1}{4^2} = -0.85\,\text{eV}$
...

Benötigte Anregungsenergie gegeben durch Differenz der Energieniveaus:
$|E_1 - E_2| = 10.20\,\mathrm{eV}$
$|E_1 - E_3| = 12.09\,\mathrm{eV}$
$|E_1 - E_4| = 12.75\,\mathrm{eV}$
...

$\rightarrow$ *Energie der Elektronen* $E_e = 10\,\mathrm{eV}$ *reicht nicht zur Anregung aus, da:*
$|E_1 - E_n| > E_e \ \forall\ n \geq 2$

d) Erklären Sie, warum die Wasserstoffatome im ersten angeregten Zustand von den Elektronen aus Teilaufgabe c) in jeden beliebigen höheren Zustand angeregt werden können.

$E_2 = -13.6\,\mathrm{eV} \cdot \frac{1}{2^2} = -3.4\,\mathrm{eV}$
$E_3 = -13.6\,\mathrm{eV} \cdot \frac{1}{3^2} = -1.51\,\mathrm{eV}$
$E_4 = -13.6\,\mathrm{eV} \cdot \frac{1}{4^2} = -0.85\,\mathrm{eV}$
$E_5 = -13.6\,\mathrm{eV} \cdot \frac{1}{5^2} = -0.55\,\mathrm{eV}$
...
$E_{\mathrm{Ion}} = 0$

Benötigte Anregungsenergie gegeben durch Differenz der Energieniveaus:
$|E_2 - E_3| = 1.89\,\mathrm{eV}$
$|E_2 - E_4| = 2.55\,\mathrm{eV}$
$|E_2 - E_5| = 2.85\,\mathrm{eV}$
...
$|E_2 - E_{\mathrm{Ion}}| = 3.4\,\mathrm{eV}$

$\rightarrow$ *Energie der Elektronen* $E_e = 10\,\mathrm{eV}$ *reicht zur Anregung jeglicher Niveaus aus, da:*
$|E_2 - E_n| < E_e \ \forall\ n \geq 3$

e) Geben Sie ein mögliches Verfahren an, um die kinetische Energie der Elektronen aus Teilaufgabe c) zu messen, nachdem Sie durch das Wasserstoffgas geflogen sind, und erläutern Sie das Prinzip des Verfahrens.

Durch Anlegen einer Gegenspannung (E-Feld) kann die Elektronenenergie bestimmt werden.

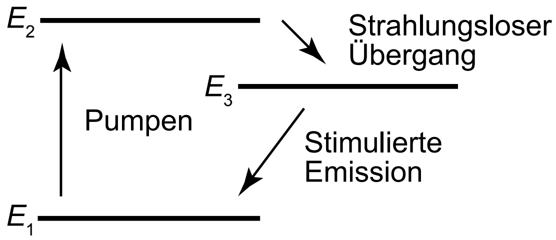
- *Auf geladenen Teilchen wirkt im E-Feld die Kraft* $F = qE$*, die Elektronen werden durch die Gegenspannung abgebremst.*
- *Nur Teilchen, deren Energie groß genug ist, das E-Feld zu durchqueren, werden gemessen.*
- *Durch Variation der Gegenspannung wird der Fluss der Teilchen gemessen, die jeweils genug Energie haben, um das angelegte E-Feld zu überwinden.*

Alternativen: Magnetfeld, gekreuzte E- und B-Felder, ...

Aufgabe 4: Laser (20 Punkte)

Das Funktionsprinzip des Lasers beruht auf Übergängen zwischen drei (oder vier) quantenmechanischen Energieniveaus.

a) Skizzieren Sie die relevanten Übergänge eines 3-Niveau-Lasers, und benennen Sie die jeweilige Übergangsart.



b) Das obere und mittlere Energieniveau haben eine Energie von $E_2 = 2\,\text{eV}$ bzw. $E_3 = 1.8\,\text{eV}$ über dem Grundzustand. Berechnen Sie die Wellenlänge des Laserlichtes.

Das eigentliche Lasern findet zwischen E_3 und E_1 statt.
Benutze $E = h\nu$ und $v = c/\lambda$:
$\Delta_E = E_3 - E_1 = 1.8\,\text{eV} = h\nu \rightarrow \nu = \Delta_E/h = 1.8\,\text{eV}/4.1 \times 10^{-15}\,\text{eVs} = 4.4 \times 10^{14}\,\text{s}^{-1}$

$\nu = c/\lambda \rightarrow \lambda = c/\nu = \frac{3 \times 10^8\,\text{m/s}}{4.4 \times 10^{14}\,\text{s}^{-1}} = 682\,\text{nm}$

c) Vergleichen Sie die Leistungsdichte eines Lasers mit einer Strahlleistung von 1 W und einem Strahldurchmesser von 2 mm mit der einer 100-W-Glühlampe, die Licht mit einem Wirkungsgrad von 10% isotrop emittiert. Berechnen Sie dafür die Leistungsdichte von Glühbirne und Laser in einem Abstand von 3 m bei senkrechter Einstrahlung. Nehmen Sie für den Laser ein kreisförmiges Strahlprofil mit konstanter Leistungsdichte an.

Leistungsdichte $\rho = \frac{P}{A}$.

Leistungsdichte ρ_G der Glühbirne:
$\rho_G = \frac{P}{A} = \frac{100\,\text{W} \cdot 0.1}{4\pi(3\,\text{m})^2} = 0.088\,\text{W/m}^2$

Leistungsdichte ρ_L des Lasers:
$\rho_L = \frac{P}{A} = \frac{1\,\text{W}}{\pi(0.001\,\text{m})^2} = 318\,\text{kW/m}^2$

Aufgabe 5: „Particle in a Box“ in zwei Dimensionen (20 Punkte)

Ein quantenmechanisches Teilchen befindet sich in einem quadratischen zweidimensionalen Potenzial der Seitenlänge L mit unendlich hohen Wänden: $V(x,y) = 0$ für $0 < x < L$ und $0 < y < L$.

a) Welche Bedingungen müssen alle quantenmechanisch erlaubten Wellenfunktionen in diesem System erfüllen?

Erlaubte Wellenfunktionen müssen Lösungen der Schrödingergleichung sein und am Rand des Quadrats verschwinden: $\psi(x,y) = 0$ für $x = 0, L$ oder $y = 0, L$. (Dies folgt auch aus der allgemeineren Bedingung, dass die Wellenfunktion an jedem Punkt stetig und stetig differenzierbar sein muss.)

b) Geben Sie den Hamilton-Operator des Systems an. Schreiben Sie dabei möglicherweise vorkommende Impuls- oder Ortsoperatoren explizit in Form partieller Ableitungen.

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(x,y) = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + V(x,y) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + V(x,y)$$

c) Lösen Sie die statische Schrödingergleichung durch einen Produktansatz der Form $\psi(x,y) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y)$, und zeigen Sie, dass die Wellenfunktion die Form

$$\psi(x,y) = A \cdot \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \quad \text{mit} \quad n_x, n_y = 1, 2, 3, \ldots$$

besitzt. Zeichnen Sie in obige Skizze qualitativ die x-Kompontente der Wellenfunktion für $n_x = 1$ und die y-Komponente der Wellenfunktion für $n_y = 2$ ein.

Innerhalb des zweidimensionalen Kastens gilt $V(x,y) = 0$. Damit lautet die stationäre Schrödingergleichung:

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad \textit{mit} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Mit dem Produktansatz $\psi(x,y) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y)$ und Teilen durch $\psi_x(x) \cdot \psi_y(y)$ ergibt sich:

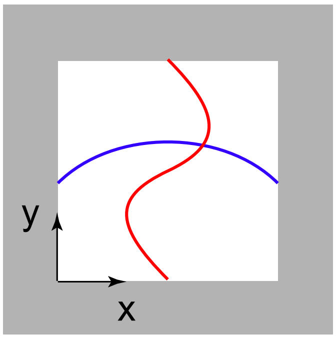
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\psi_x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1}{\psi_y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2}\right) = E$$

Da der erste Term in der Klammer nur von ψ_x und der zweite Term nur von ψ_y abhängt, die Gleichung aber für alle (x,y) gelten soll, kann sie nur konstant sein. Damit zerfällt die Gleichung in zwei separate Gleichungen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} = E_x \psi_x \quad \textit{und} \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} = E_y \psi_y.$$

Da die Wellenfunktion am Rand verschwinden muss, können die Lösungen nur von der Form $\psi_x \sim \sin(k_x x) = \sin(n_x \pi x/L)$ und $\psi_y \sim \sin(k_y y) = \sin(n_y \pi x/L)$ sein, d. h. erlaubte Wellenzahlen $k_{x,y}$ sind Vielfache von π/L. Dies kann durch Einsetzen der Lösungen in die Gleichungen gezeigt werden. Eine ausführlichere Herleitung findet sich in Kapitel 6.1 der Vorlesung.

Skizze der x- und y-Komponenten der Wellenfunktion:



Wichtig: die x-Komponente der Lösung besitzt einen Schwingungsbauch ($n_x = 1$) und keine Knoten, die y-Komponente einen Knoten ($n_y = 2$).

d) Welche Werte kann die Gesamtenergie des Systems annehmen?

Das Argument des Sinus hat die Form $k_n x$, wobei k_n nur diskrete Werte einnehmen kann $k_n = n\pi/L$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$. Mit $p = \hbar k$ ergibt sich $E = p^2/(2m) = \hbar^2 k^2/(2m)$ und damit:

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2).$$