Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Kernphysik

Musterlösung zur 2. Klausur zur Vorlesung

Moderne Physik für Lehramtskandidaten, Geophysiker, Meteorologen und Ingenieurpädagogen

Prof. Dr. U. Husemann, Dr. M. Niegel

Sommersemester 2012
11. September 2012

Aufgabe 1: Kurzfragen (40 Punkte)

a) Ein Fahrzeug bewegt sich mit der Geschwindigkeit v auf Sie zu. Mit welcher Geschwindigkeit erreicht Sie das Scheinwerferlicht des Fahrzeugs?

Mit Lichtgeschwindigkeit (universelle Grenzgeschwindigkeit). Dies ergibt sich auch durch relativistische Addition der Geschwindigkeiten:

$$u = \frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}} = c.$$

b) Aus welchen Elementarteilchen bestehen Kathodenstrahlen?

Kathodenstrahlen bestehen aus Elektronen, die aus einer Glühkathode ausgeschwitzt werden.

c) Wie unterscheiden sich die Atommodelle von Rutherford und Thomson?

- *Rutherford: Atom besteht aus kleinem massiven Kern und Elektronenhülle.*
- *Thomson: Elektronen gleichmäßig in homogener positiv geladener Substanz verteilt („Rosinenkuchen“).*

d) Was besagt die Heisenberg'sche Unschärferelation?

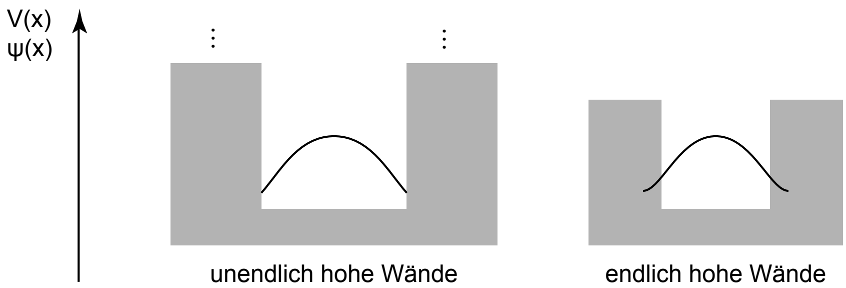
Ort und Impuls eines Teilchens können prinzipiell nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden.

e) Was sagt das Pauliprinzip über die erlaubten Quantenzustände aus, in denen sich Fermionen befinden können? Aus welcher Eigenschaft der quantenmechanischen Wellenfunktion folgt dies?

Zwei identische Fermionen können nicht gleichzeitig denselben Quantenzustand besetzen. Dies folgt aus der Antisymmetrie der Wellenfunktion von Fermionen unter Vertauschung zweier Teilchen:

$$\psi(\ldots,j,\ldots,i,\ldots) = -\psi(\ldots,i,\ldots,j,\ldots) \quad \rightarrow \psi = 0 \quad \textit{für} \quad i=j.$$

f) Skizzieren Sie den Verlauf der Wellenfunktion eines Teilchens im Grundzustand, das in einem eindimensionalen Potenzialtopf mit unendlich hohen Wänden gebunden ist? Was verändert sich, wenn die Höhe der Wände endlich ist?



Wichtige Merkmale: für unendlich hohe Wände verschwindet Wellenfunktion am Rand des Potenzialtopfs, für endlich hohe Wände ist sie in diesem Bereich exponentiell gedämpft.

g) Skizzieren Sie alle Möglichkeiten, wie zwei Bosonen auf zwei unterschiedliche Zustände verteilt werden können.

Zwei Bosonen sind ununterscheidbar und können sich im selben Quantenzustand befinden. Daher gibt es drei Möglichkeiten:

B B		1. Möglichkeit?	B	B	3. Möglichkeit?
	B B	2. Möglichkeit?			4. Möglichkeit?

h) Skizzieren Sie alle Möglichkeiten, wie zwei Fermionen auf drei unterschiedliche Zustände verteilt werden können.

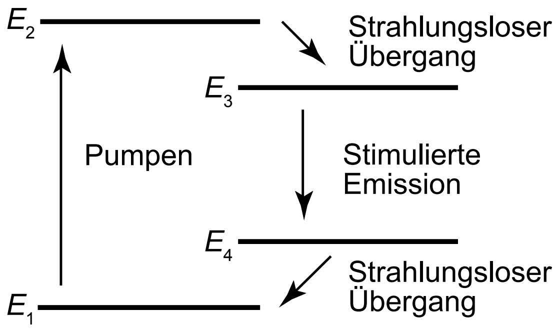
Zwei Fermionen sind ununterscheidbar und dürfen sich nicht im selben Quantenzustand befinden (Pauliprinzip). Daher gibt es drei Möglichkeiten:

F	F		1. Möglichkeit?	F		F	3. Möglichkeit?
	F	F	2. Möglichkeit?				4. Möglichkeit?

i) Warum ist der Himmel blau?

Durch Rayleigh-Streuung des Sonnenlichts an den Sauerstoff- und Stickstoffmolekülen der Atmosphäre wird blaues Licht (kurze Wellenlängen λ) stärker gestreut als andere Farben, da die Intensität der gestreuten Strahlung proportional zu λ^{-4} ist.

j) Skizzieren Sie die relevanten Übergänge zwischen Energieniveaus eines Vier-Niveau-Lasers beim Pumpen und bei der stimulierten Emission.

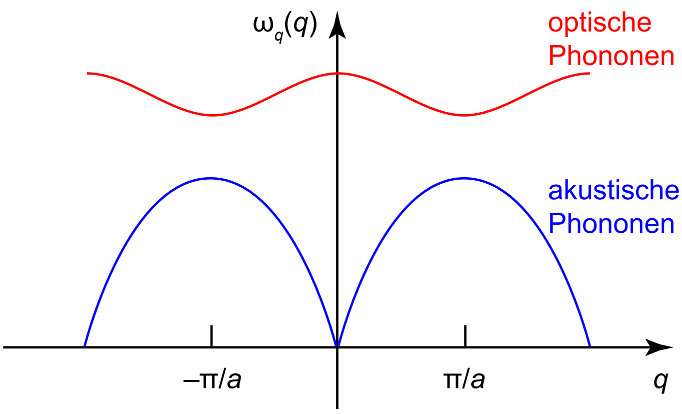


Pumpen findet zwischen dem Grundzustand E_1 und einem Zustand E_2 statt (oft auch Spektrum von Zuständen). Stimulierte Emission des Laserlichts findet statt zwischen E_3 und E_4.

k) Welche Arten von Ladungsträgern tragen zur elektrischen Leitfähigkeit eines Halbleiters bei?

Zur Leitfähigkeit im Halbleiter tragen Elektronen und Löcher bei.

l) Skizzieren Sie die Dispersionsrelation $\omega_q(q)$ für akustische und optische Phononen mit Wellenzahl q in einem Kristall.



Aufgabe 2: Wechselwirkung von Licht mit Materie (20 Punkte)

Ein Photon mit der Wellenlänge λ_1 streut an einem freien Elektron.

a) Geben Sie Impuls und Energie des Photons in Abhängigkeit von λ_1 an.

- *Energie:* $\nu = c/\lambda_1 \to E = h\nu_1 = hc/\lambda_1$

- *Impuls:* $E = pc \to p = h\nu_1/c = h/\lambda_1$

b) Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Wellenlängendifferenz des Photons vor und nach dem Streuprozess, $\lambda_2 - \lambda_1$, und dem Winkel θ zwischen einfallendem und ausfallendem Photon (Streuwinkel) an. Berechnen Sie die Compton-Wellenlänge für Elektronen.

- *Compton-Streuung (Formel vorausgesetzt, ggf. herleiten):*
  $\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$

- *Compton-Wellenlänge:*
  Der Hinweis zu Aufgabe 2 enthält die falsche Einheit für die Elektronenmasse. Die korrekte Angabe lautet $m_e = 5.1 \times 10^5\,\mathrm{eV/c^2}$. *In der Folge entstehende falsche Werte und Einheiten führen nicht zu Punktabzug.*
  $\lambda_C \equiv \frac{h}{mc} = \frac{4.1 \times 10^{-15}\,\mathrm{eVs} \cdot 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{5.1 \times 10^5\,\mathrm{eV}} = 0.243 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} = 0.002\,43\,\mathrm{nm}$

c) Die Messungen der Wellenlänge des gestreuten Photons bei einem Streuwinkel $\theta = 120^\circ$ ergibt, dass die Wellenlänge der einfallenden Strahlung um 1.5 % verschoben ist. Ist die Wellenlänge λ_2 nach dem Streuprozess größer oder kleiner als λ_1? Berechnen Sie die Wellenlänge λ_1 des Photons vor dem Streuprozess.

Die Wellenlänge wird größer, also $\lambda_2 > \lambda_1$

$$
\begin{aligned}
\Delta\lambda &= \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - cos\theta) \\
\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} &= 1.5\% = 0.015 \\
\to \lambda_1 &= \frac{\Delta\lambda}{0.015} = \frac{h}{mc}\frac{(1-\cos\theta)}{0.015} = \frac{h}{mc}\frac{(1-0.5)}{0.015} \\
&= 0.002\,43\,\mathrm{nm} \cdot 100 = 0.243\,\mathrm{nm}.
\end{aligned}
$$

Die Wellenlänge der einfallenden Strahlung ist $\lambda_1 = 0.243\,\mathrm{nm}$.

d) Wie groß ist die Wellenlänge λ_2 des gestreuten Photons bei einem Streuwinkel $\theta = 75\,^\circ$?

$$\begin{aligned}
\lambda_2 - \lambda_1 &= \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \\
\lambda_2 &= \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) + \lambda_1 \\
&= 0.002\,43\,\mathrm{nm}(1 - 0.26) + 0.243\,\mathrm{nm}) = 0.245\,\mathrm{nm}.
\end{aligned}$$

Die Wellenlänge der gestreuten Strahlung ist $\lambda_2 = 0.245\,\mathrm{nm}$.

Aufgabe 3: Wasserstoffatom (20 Punkte)

Wir betrachten ein System aus Wasserstoffatomen im Grundzustand.

a) Wie hängen beim Wasserstoffatom die Hauptquantenzahl n mit den Energieniveaus E_n zusammen?

Für Hauptquantenzahl n gilt für die Energieniveaus E_n:
$E_n = -13.6\,\mathrm{eV} \cdot \frac{1}{n^2}$ *(Angabe mit Rydbergenergie genügt)*

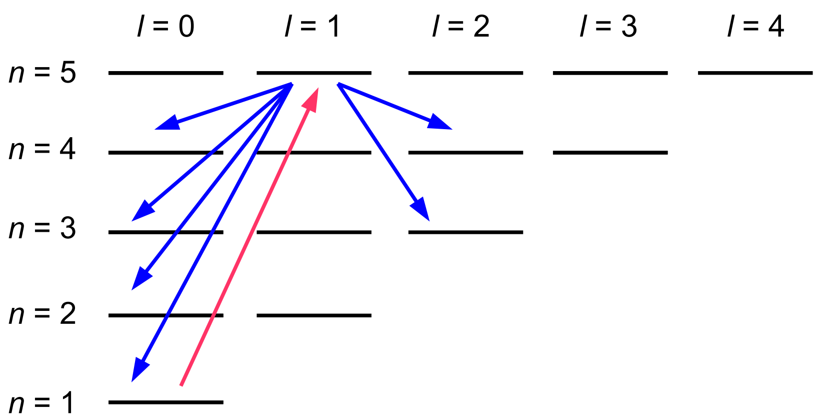
Alternativ: $E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2} \cdot \frac{1}{n^2}$

b) Wie hängt die Drehimpulsquantenzahl l und die magnetische Quantenzahl des Drehimpulses m_l mit der Hauptquantenzahl n zusammen?

- *Sowohl l als auch m_l sind ganzzahlig.*
- *Drehimpulsquantenzahl:* $l = 0, 1, \ldots, n-1$
- *Magnetische Quantenzahl:* $m_l = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$

c) Das System aus Atomen soll durch Beschuss mit Photonen vom Grundzustand in den Zustand mit $n = 5$ angeregt werden. Wie groß muss die Energie der Photonen mindestens sein? Zeichnen Sie den Übergang in das Termschema ein. Wie viele Spektrallinien enstehen durch direkte Übergänge in Zustände mit geringerer Energie unter Emission genau eines Photons? Zeichnen Sie alle möglichen Übergänge in das Termschema ein, und geben Sie die Wellenlängen der Linie mit der minimalen und der Linie mit der maximalen Energie an.

Hinweis: Vernachlässigen Sie die Fein- und Hyperfeinstrukturaufspaltung der Spektrallinien. Welche optischen Übergänge sind erlaubt?



- *Wegen des Drehimpulses des absorbierten Photons sind nur Anregungen zu p-Niveaus erlaubt, da $\Delta l = \pm 1$ und im $1s$-Grundzustand $l = 0$ gilt.*

- *Wenn bei den Übergängen von hohen zu niedrigen Energieniveaus genau ein Photon ausgesandt wird, sind nur Übergänge mit $\Delta l = \pm 1$ erlaubt.*
- *Es enstehen vier Spektrallinien, die p- und d-Niveaus mit derselben Hauptquantenzahl n sind entartet und ergeben keine unterscheidbaren Linien im Spektrum.*
- *Mindestenergie der Photonen:* $\Delta E = E_5 - E_0 = -13.6\,\mathrm{eV}(1/5^2 - 1/1^2) = 13.06\,\mathrm{eV}$
- *Maximale Wellenlänge im Spektrum:*
  $\Delta E = E_5 - E_4 = -13.6\,\mathrm{eV}(1/5^2 - 1/4^2) = 0.306\,\mathrm{eV}$
  $E = hc/\lambda \rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{4.1\times10^{-15}\,\mathrm{eVs}\cdot 3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}}{0.306\,\mathrm{eV}} = 4020\,\mathrm{nm}$
- *Minimale Wellenlänge im Spektrum:*
  $\Delta E = 13.06\,\mathrm{eV}$
  $E = hc/\lambda \rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{4.1\times10^{-15}\,\mathrm{eVs}\cdot 3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}}{13.06\,\mathrm{eV}} = 94.2\,\mathrm{nm}$

d) Wir betrachten ein System aus Wasserstoffatomen, die in den $2p$-Zustand angeregt wurden. Wie viele zusätzliche Spektrallinien beobachten Sie im Emissionsspektrum, wenn an das System ein Magnetfeld in z-Richtung angelegt wird? Wie groß ist der Energieunterschied dieser Spektrallinien, wenn ein Magnetfeld der Stärke 1 T angelegt wurde?

Zusätzliche Linien:

- *Im Magnetfeld spalten sich die Energieniveaus entsprechend der Ausrichtung von* m_l *auf:* $E_B = m_l \mu_B B_z$
- *Der $2p$-Zustand spaltet sich in drei Zustände der Energie* $E = E_2 + E_B = E_2 + m_l \mu_B B_Z$ *mit* $m_l = -1, 0, 1$ *auf.*
- *Der $1s$-Zustand hat $l = 0$ und spaltet sich dementsprechend nicht auf.*

$\rightarrow$ *Es können zwei zusätzliche Linien beobachtet werden. Für ein Magnetfeld von* $B_z = 1\,\mathrm{T}$ *unterscheidet sich die Energie der Linien um* $\Delta E = \mu_B B_z = 0.116\,\mathrm{meV}$.

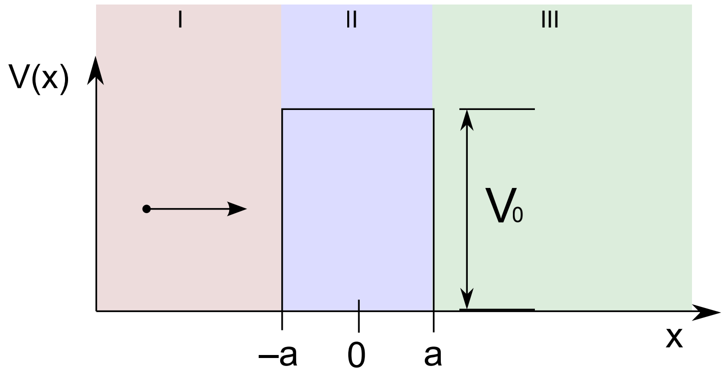
Im Prinzip wären auch Übergänge zwischen den durch das Magnetfeld aufgespaltenen $2p$- und $2s$-Niveaus erlaubt, aber man kann zeigen, dass die Übergangsrate aufgrund der geringen Energiedifferenz stark unterdrückt ist.

Aufgabe 4: Potenzialbarriere (20 Punkte)

Wir betrachten ein Potenzial der Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{falls } |x| \leq a, \\ 0 & \text{falls } |x| > a. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Verlauf des Potenzials.



b) Was passiert mit klassischen Teilchen mit der Energie $E < V_0$ bzw. $E > V_0$, die von links auf die Potenzialbarriere treffen?

- $E < V_0$: *Reflexion des Teilchens*
- $E > V_0$: *Abbremsen des Teilchens*

c) Wie unterscheidet sich im Vergleich dazu das Verhalten eines quantenmechanischen Teilchens der Energie $E < V_0$, das von links auf die Potenzialbarriere trifft?

Tunneleffekt: Die Wellenfunktion des Teilchens kann in die Potenzialbarriere eindringen (exponentielle Form) und besitzt somit eine von Null verschiedene Transmissionswahrscheinlichkeit.

d) Wir betrachten im Folgenden weiterhin das quantenmechanische Teilchen der Energie $E < V_0$, das von links auf die Potenzialbarriere trifft. Stellen Sie für die verschiedenen Bereiche des Potenzials jeweils die stationäre Schrödingergleichung auf. Schreiben Sie dabei möglicherweise vorkommende Impuls- oder Ortsoperatoren explizit in Form partieller Ableitungen.

$$H\psi = E\psi$$

mit

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(x) = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

mit

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \textit{falls } |x| \leq a, \\ 0 & \textit{falls } |x| > a. \end{cases}$$

e) Geben Sie an, aus welchen Teilen sich die Lösungen der Schrödingergleichung in den Bereichen mit $V(x) = 0$ zusammensetzen.

- *Bereich I:* $\psi_{\mathrm{I}}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = C(e^{ikx} + Re^{-ikx})$
  Lösung besteht aus einem nach rechts laufenden (einlaufenden) und links laufenden (reflekierten) Teil.
- *Bereich III:* $\psi_{\mathrm{III}}(x) = Te^{ikx}$
  Lösung besteht aus einem nach links laufenden (transmittierten) Teil.

Aufgabe 5: Kernphysik und Weinbetrug (20 Punkte)

Beim Handel mit alten Weinen tauchen gelegentlich Weinflaschen mit gefälschtem Jahrgang auf. Mit Methoden der Kernphysik kann ein solcher Betrug aufgedeckt werden, ohne eine (potenziell wertvolle) Weinflasche zu öffnen. Ein möglicher Ansatz benutzt das radioaktive Caesium-Isotop $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$, das bei der Spaltung von $^{235}_{92}\mathrm{U}$ entsteht. In den Jahren 1950 bis 1963 wurde $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$ durch Kernwaffenversuche in der Atmosphäre freigesetzt. Bordeaux-Wein dieser Jahrgänge zeigt heute noch eine Aktivität aufgrund von $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$ von bis zu $1\,\mathrm{Bq} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ pro Liter. Ältere oder jüngere Weine weisen deutlich niedrigere Aktivitäten auf.

a) Das Caesium-Isotop $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$ ist ein β^--Strahler mit einer Halbwertszeit von etwa 30 Jahren. Geben Sie die Reaktionsgleichung für den β^--Zerfall von $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$ an.

   Hinweis: Das Element mit der Kernladungszahl $Z = 54$ ist Xenon (Xe), das Element mit $Z = 56$ ist Barium (Ba).

   Es handelt sich um einen β^--Zerfall, bei dem sich ein Neutron in ein Proton umwandelt, und dabei ein Elektron und ein Antielektronneutrino emittiert. Damit erhöht sich die Kernladungszahl Z um eins, währende die Atomzahl A konstant bleibt. Die Reaktionsgleichung lautet somit:

$$^{137}_{55}\mathrm{Cs} \to {}^{137}_{56}\mathrm{Ba}^{(*)} + e^- + \bar{\nu}_e$$

b) Das in Teilaufgabe a) erzeugte Isotop ist metastabil und geht unter Emission eines Photons mit einer Energie von 661.7 keV in einen stabilen Zustand über. Geben Sie die Reaktionsgleichung für diesen Prozess an.

$$^{137}_{56}\mathrm{Ba}^* \to {}^{137}_{56}\mathrm{Ba} + \gamma$$

c) Bei Weinflaschen können Photonen aus dem $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$-Zerfall mit einer genauen Energiemessung bei extrem niedrigem Untergrund durch andere radioaktive Zerfälle nachgewiesen werden. Mit einem Detektor mit einer Nachweiseffizienz von 0.1% wird eine Weinflasche vermessen, die mehr als 70 Jahre alt sein soll. Welcher Aktivität entspricht die gemessene Zählrate von $\dot{N} = 3\,\mathrm{h}^{-1}$? Handelt es sich um Weinbetrug? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

   Die bei einer Effizienz von $\varepsilon = 0.001$ gemessenen Zählrate von $\dot{N} = 3\,\mathrm{h}^{-1} = 8.3 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$ entspricht einer Aktivität $A = \dot{N}/\varepsilon = 0.83\,\mathrm{Bq}$. Damit handelt es sich (sehr wahrscheinlich) um Weinbetrug, denn eine solche Aktivität wird nicht für Weine von 1942 erwartet.

d) Wie viele $^{137}_{55}$Cs-Atome müssen heute noch in der Weinflasche enthalten sein, um die beobachtete Aktivität zu erklären? Wie viele $^{137}_{55}$Cs-Atome waren es vor 50 Jahren?

Die Aktivität A ergibt sich aus dem radioaktiven Zerfallsgesetz $\dot{N} = -\lambda N = -A$, wobei N hier die Zahl der instabilen Kerne ist und die Zerfallsrate $\dot{N}$ somit negativ. Die Halbwertszeit von etwa 30 Jahren aus Teilaufgabe a) kann in die Zerfallskonstante λ umgerechnet werden mittels $\lambda = \ln 2/t_{1/2} = 0.023\,\mathrm{a}^{-1} = 7.3 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}^{-1}$. Mit $A = 0.83\,\mathrm{Bq}$ aus Teilaufgabe b) ergibt sich eine Anzahl von $N = A/\lambda = 1.14 \times 10^{9}$ $^{137}_{55}$Cs-Atome.

Mit der Lösung der obigen Differenzialgleichung $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ lässt sich daraus auch die Anzahl im Abstand von Δt Jahren ausrechnen:

$$\frac{N(t+\Delta t)}{N(t)} = \frac{N_0 e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \cdot \Delta t}.$$

Mit $\Delta t = -50\,\mathrm{a}$ und $\lambda = \ln 2/(30\,\mathrm{a})$ ergibt sich $e^{-\lambda \cdot \Delta t} = 3.17$. Vor 50 Jahren waren also $3.17 \cdot 1.14 \times 10^{9} = 3.62 \times 10^{9}$ $^{137}_{55}$Cs-Atome im Wein vorhanden.