Modulklausur zur
Modernen Physik für Geophysiker, Meteorologen u. Lehramtskandidaten (alte PO)
15.10.2015

Aufgabe 1: Paarbildung (4 Punkte)

Ein hochenergetisches Photon trifft auf einen Atomkern und wird in ein Elektron-Positron-Paar umgewandelt.

a) Stellen Sie die Energiebilanz für diesen Prozess auf.
b) Welche Energie, Masse, Frequenz, Wellenlänge und Impuls muss das Photon für diese Paarbildung mindestens haben?
c) Welche Rolle spielt der Atomkern für das Zustandekommen dieses Prozesses?

Aufgabe 2: Stoß eines Photons mit einem Elektron (5 Punkte)

Ein Photon der Wellenlänge λ_1 fliegt entlang der x-Achse und stößt auf ein ruhendes Elektron. Das Photon gibt einen Teil seiner Energie an das Elektron ab, wird dabei um den Winkel θ gestreut und hat danach die Wellenlänge λ_2.

a) Wie nennt man diesen Effekt? Geben Sie die relativistische Gesamtenergie des Elektrons und des Photons vor und nach dem Stoß an.
b) Wie groß sind die Impulskomponenten des Elektrons und des Photons vor und nach dem Stoß in Abhängigkeit vom Streuwinkel θ? Betrachten Sie das Problem in der x-y-Ebene.
Berechnen Sie aus der Impulsbilanz für das Photon den Impuls $\vec{p}_e'$ des Elektrons nach dem Stoß.
c) Setzen Sie das Ergebnis aus b) in den Energieerhaltungssatz ein und lösen nach $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ auf. Bei welchem Streuwinkel findet der größte Impulsübertrag statt?

Hinweis: Die Energie eines bewegten Teilchens ist: $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$.

Aufgabe 3: Festkörperphysik (6 Punkte)

a) Skizzieren Sie die spezifische Wärmekapazität $c_V(T)$ in Abhängigkeit von der Temperatur für einen Isolator und erläutern/erklären Sie gbf. die verschiedenen Bereiche. Unterscheidet sich die Wärmekapazität eines Metalls von der eines Isolators? Ist das eine Frage der Temperatur?
b) Berechnen Sie die Raumfüllung eines kubisch-raumzentrieten Gitters (bcc), wenn man annimmt, dass der Kristall aus harten sind berührenden Kugeln (mit gleichem Radius) besteht.
Welche Dichte ergibt sich damit für Barium (Gitterkonstante a_{Ba} = 0,502 nm und Molmasse M_{Ba} = 137,34 g/mol)

Aufgabe 4: Atomare Wellenfunktionen (6 Punkte)

a) Schreiben Sie die zeitabhängige und die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein Quantenteilchen der Masse m_0 auf, das sich in einem eindimensionalen Potential $V(x,t)$ bewegt. Wie lautet die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion?
b) Ein neutrales Atom im Grundzustand hat die Kernladungszahl Z = 10. Welche Orbitale sind von seinen Elektronen besetzt? Geben Sie alle Quantenzahlen an, die dabei eine Rolle spielen.
c) Unter den Natrium-D-Linien versteht man die beiden Übergange: $3p_{1/2} \rightarrow 3s_{1/2}$ (λ_1 = 589,5924 nm) und $3p_{3/2} \rightarrow 3s_{1/2}$ (λ_2 = 588,9950 nm).
Warum sind die beiden 3p Zustände energetisch nicht gleich? Wie nennt man diesen Unterschied? Berechnen Sie aus den Wellenlängen den Energieunterschied der 3p-Terme (in eV) und den entsprechenden Frequenzunterschied.

Aufgabe 5: Kernphysik (6 Punkte)

a) Welche Rolle spielt die Dichte der Kernmaterie im Tröpfchenmodell? Was ergibt sich daraus für die Volumenenergie und die Oberflächenenergie in Abhängigkeit von der Nukleonenzahl?
b) Skizzieren Sie für stabile Kerne grob die Anzahl der Neutronen über der Anzahl der Protonen. Was sind Isotope? Geben Sie Beispiele für das Element mit der Ordnungszahl 1.
c) ^{238}U zerfällt mit einer Halbwertszeit $T_{1/2} = 4{,}5 \cdot 10^9$ a über mehrere Zerfallsstufen zu ^{206}Pb.
   i) Berechnen Sie, wie viele von ursprünglich 10^6 ^{238}U-Kernen nach dem Verlauf von 3 Milliarden Jahren noch vorhanden sind. Wie groß ist die Zerfallszeit?
   ii) Die chemische Analyse eines Meteoritenbruchstücks ergibt, dass sich von ursprünglich 100% ^{238}U-Kernen inzwischen 54% in ^{206}Pb-Kerne umgewandelt haben. Wie alt ist das Bruchstück?

Nützliche Zahlenwerte:

m_{0e} = $9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg (Ruhemasse des Elektrons)
$c = 3 \cdot 10^8$ m/s (Lichtgeschwindigkeit im Vakuum)
$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js (Plancksches Wirkungsquantum)
$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As (Elementarladung)
N_A = $6{,}022 \cdot 10^{+23}$ 1/mol (Avogadrokonstante)

Aufgabe 1

a) $h\nu = 2 m_e c^2 + E_{kin}^{e^-} + E_{kin}^{e^+} + \Delta E_{kin}^{Kern}$

$2 m_e c^2$: Ruheenergie von Elektron u. Positron

ΔE_{kin}^{Kern}: Energieübertrag auf den Kern (vernachlässigbar)

$h\nu$: Energie des einfallenden Photons (γ)

b) Mindestenergie für Paarbildung

$E_{kin}^{\gamma} = 2 m_e c^2$

$= 1{,}022 \text{ MeV} = 1{,}637 \cdot 10^{-13}\ J$

$m_\gamma = 0$ (Ruheenergie)

$\nu = \frac{E}{h} = 2{,}47 \cdot 10^{20} \frac{1}{s}$

$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{c}{\nu} = 1{,}214 \cdot 10^{-12}\ m$

$p = \frac{h}{\lambda} = 5{,}46 \cdot 10^{-22} \frac{Js}{m} = 5{,}46 \cdot 10^{-22} \frac{kg\,m}{s}$

c) der Kern muss den überschüssigen Impuls der Photonen aufnehmen

$p_e = \sqrt{\frac{E_e^2}{c^2} - \frac{m_e^2}{c^2}} < \sqrt{\frac{E_e^2}{c^2}} = \frac{E_e}{c}$

$\Rightarrow p_{e^-,x} + p_{e^+,x} < p_{e^-} + p_{e^+} < \frac{(E_{e^-} + E_{e^+})}{c} = \frac{E_\gamma}{c} = p_\gamma$

Aufgabe 2

a) Compton-Effekt

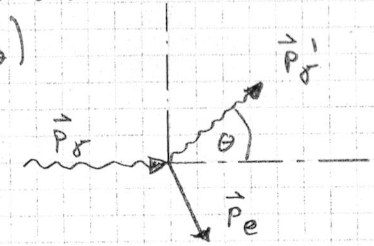
vorher: $E_e = m_e c^2$; $E_\gamma = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda_1}$

nachher: $E_e' = \sqrt{p_e'^2 c^2 + m_e^2 c^4}$; $E_\gamma' = \frac{hc}{\lambda_2}$

b) vorher: $\vec{p}_\gamma = \hbar \vec{k} = \frac{h}{\lambda_1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}h/\lambda_1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{p}_e = 0$

nachher: $\vec{p}_\gamma{}' = \hbar \vec{k}' = \frac{h}{\lambda_2}\begin{pmatrix}\cos\Theta\\ \sin\Theta\end{pmatrix}$

$\vec{p}_e{}' = \vec{p}_\gamma - \vec{p}_\gamma{}' = \begin{pmatrix}\frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2}\cos\Theta \\ -\frac{h}{\lambda_2}\sin\Theta\end{pmatrix}$



c) Energieerhalt

$E_\gamma + m_e c^2 = E_\gamma' + \sqrt{p_e'^2 c^2 + m_e^2 c^4}$

$\left(\frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} + m_e c^2\right)^2 = \left(\frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2}\cos\Theta\right)^2 + \left(\frac{hc}{\lambda_2}\sin\Theta\right)^2 + m_e^2 c^4$

$-\frac{h}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{c\,m_e}{\lambda_1} - \frac{c\,m_e}{\lambda_2} = -\frac{h\cos\Theta}{\lambda_1\lambda_2} + (\sin^2\Theta + \cos^2\Theta)$

$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\lambda_1\lambda_2 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\Theta)$

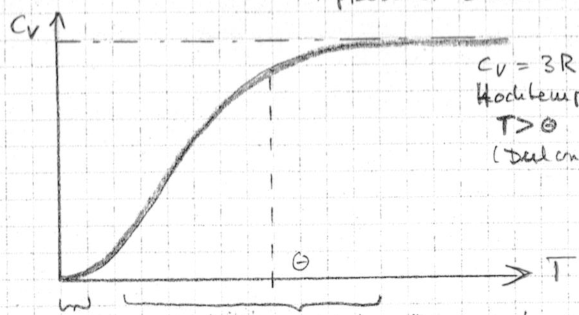
$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\Theta)$

$\Theta = 180°$ (Rückstoß) $\Rightarrow \Delta\lambda = 2\frac{h}{m_e c}$ maximal

Aufgabe 3

typischer Isolator

a)



$C_V = 3R$
Hochtemperaturbereich
$T > \Theta$
(Dulong-Petit)

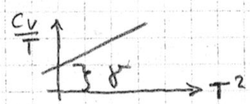
$C_V \sim T^3$
Tieftemperaturbereich

Abfall zu tiefen Temperaturen: Oszillatoren können thermisch immer weniger angeregt werden

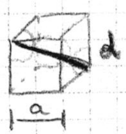
Debye-Gesetz (Beitrag langwelliger akustischer Phononen)

Metall: Hochtemperaturbereich gleich
tiefe Temperaturen

$C_V = \gamma T + \alpha T^3$ (durch Leitungselektronen)



b)



$d = 4r$ auf Würfeldiagonalen

$d = a\sqrt{3} \quad \rightsquigarrow \quad r = \frac{\sqrt{3}}{4} a$

$V_{EZ} = a^3$; gefüllter Raum: $V_F = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 2$ (2 Atome pro EZ)

$V_F = \frac{8}{3}\pi \frac{3\sqrt{3}}{64} a^3 = \frac{1}{8}\pi\sqrt{3}\, a^3$

$$\frac{V_F}{V_{EZ}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} = 0{,}68 = 68\,\%$$

$\rho = \frac{m}{V}$: $M_{Ba} = 137{,}34 \frac{g}{mol} \Rightarrow m(1\,Ba) = \frac{137{,}34}{N_A} \frac{g}{mol}$

$m(1\,Ba) = 2{,}281 \cdot 10^{-22}\,g = 2{,}281 \cdot 10^{-25}\,kg$

$$\rho = \frac{2\,m(1\,Ba)}{V} = 3606 \frac{kg}{m^3} = 3{,}6 \frac{g}{cm^3}$$

Aufgabe 4

a) $-\frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = +i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$

zeitabhängig

$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = E\,\Psi(x,t)$

↑ Energieeigenwert

$\Psi(x,t) \sim e^{-(iEt/\hbar)}$

b) $Z = 10 \rightarrow 10\,e^-$

1s: ↑↓ ; $n=1,\ l=0$, $m_s = \pm 1/2$

2s: ↑↓ ; $n=2,\ l=0$, $m_s = \pm 1/2$

2p: ↑↓ ↑↓ ↑↓ ; $n=2,\ l=1,\ m_l = \pm 1, 0$, $m_s = \pm 1/2$

c) unterschiedlicher Gesamtdrehimpuls, da Bahndrehimpuls mit Spin koppelt : $j = 1/2$ bzw $j = 3/2$

⇝ Feinstrukturaufspaltung

$\Delta E = E_2 - E_1 = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = hc \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$

$\Delta E = hc \; 1720{,}290 \frac{1}{m}$

$\Delta E = h \cdot \nu = h \cdot 516{,}087 \cdot 10^9 \frac{1}{s}$

$\Delta E = 3{,}4196 \cdot 10^{-22}\,J = 0{,}0021\,eV$

Aufgabe 5

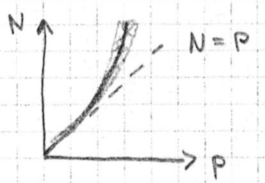
a) Tröpfchenmodell erklärt den Verlauf der Bindungsenergie / Nukleon über der Nukleonenzahl

- $\rho_{Kern} \approx$ konst $\rightsquigarrow r \sim \sqrt[3]{A} \Rightarrow V \sim A$

  $\rightsquigarrow$ damit ist die Volumenenergie $\approx$ konstant

- an der Oberfläche sind nicht alle Bindungsmöglichkeiten abgesättigt $\Rightarrow$ Abfall der Bindungsenergie / Nukleon zu leichten Kernen hin (Oberflächenenergie wird abgezogen)

b)



stabile Kerne haben Neutronenüberschuss

Isotope: Anzahl P gleich, N verschieden

^1_1H : Wasserstoff $\quad$ ^1_2H : Deuterium (1P + 2N)

^1_3H : Tritium (1P + 3N)

c) i) Halbwertszeit: $\frac{N_0}{2} = N_0 \exp\{\frac{-t_{1/2}}{\tau}\}$

$\rightsquigarrow \ln(\frac{1}{2}) = -\frac{t_{1/2}}{\tau} \Rightarrow \tau \ln 2 = t_{1/2}$

$\tau = 6{,}492 \cdot 10^9$ a

$N(t) = N_0 \exp\{-\frac{t}{\tau}\} = 6{,}3 \cdot 10^5$

ii) 54% umgewandelt $\Rightarrow$ 46% noch da

$0{,}46\ N_0 = N_0 \exp\{-\frac{t}{\tau}\}$

$t = -\tau \ln(0{,}46) = 5{,}04 \cdot 10^9$ a