

mit Musterlösung

Abschlussklausur	KIT
Moderne Physik	Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Datum: 5.8.2020	Prof. Dr. G. Quast
	Dr. Daniela Schäfer

Klausur: Moderne Physik für die Studiengänge Geophysik und Meteorologie

Aufgabe 1: Kurzfragen

- Wie hängt in der speziellen Relativitätstheorie die Gesamtenergie E eines freien Teilchens von dessen Masse m und dessen Impuls \vec{p} ab?
- Ein Myon ist ein kurzlebige Elementarteilchen, dass u. a. in der kosmischen Höhenstrahlung in der oberen Erdatmosphäre in ca. 30 km Höhe entsteht. Welchen Impuls muss ein Myon (Masse $106 \text{ MeV}/c^2$, Lebensdauer $2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$) haben, um den Erdboden zu erreichen?
- Erklären Sie anhand der Eigenschaften von Wellenpaketen kurz das Zustandekommen der Unbestimmtheit von Ort und Impuls und geben Sie den Zusammenhang zwischen Orts- und Impulsunschärfe an.
- Leiten Sie aus der unten angegebenen zeitabhängigen Schrödingergleichung die stationäre Schrödingergleichung her.
- Skizzieren Sie das Potenzial des quantenmechanischen harmonischen Oszillators. Geben Sie die Energie des Grundzustands an und skizzieren Sie qualitativ die Lage der niedrigsten drei Energieniveaus.
- Skizzieren Sie alle Möglichkeiten, wie zwei Elektronen auf zwei unterschiedliche quantenmechanische Zustände mit den Energien E_1 und E_2 verteilt werden können.
- Skizzieren Sie die relative Lage von Valenzband und Leitungsband im Bändermodell eines Festkörpers für die folgenden unterschiedlichen Klassen von Materialien: a) Isolatoren, b) (intrinsische) Halbleiter c) Leiter.
- Erklären Sie die kurze Reichweite der schwachen Wechselwirkung.

Aufgabe 2: Compton-Effekt

Ein Photon der Wellenlänge λ fliegt entlang der x -Achse und stößt auf ein ruhendes Elektron. Das Photon gibt einen Teil seiner Energie an das Elektron ab, wird dabei um den Winkel Θ gestreut und hat danach die Wellenlänge λ' .

- Fertigen Sie eine Skizze des Prozesses an. Unter welchem Streuwinkel ist die Änderung der Wellenlänge von einlaufendem zu auslaufendem Photon maximal? Wie macht sich dies im Energiespektrum der auslaufenden Photonen bemerkbar?
- Stellen Sie die Viererimpuls-Bilanz für diesen Prozess auf, d. h. geben Sie die Energien des Elektrons und des Photons vor und nach dem Stoß an, sowie die jeweiligen Impulskomponenten in Abhängigkeit vom Streuwinkel Θ .
- Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel des Photons und der Wellenlängenänderung, $\lambda' - \lambda$.
- Zeichnen Sie das Feynman-Diagramm für diesen Prozess.

Aufgabe 3: Wasserstoffatom

Die quantenmechanischen Lösungen für das Wasserstoff-Atom werden durch die Quantenzahlen n, l und m charakterisiert. Die Lösung der stationären Schrödingergleichung für den Grundzustand lautet

$$\Psi_{1,0,0}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-r/a_0} \text{ mit } a_0 = 0,0529 \text{ nm};$$

sie ist von den Winkelvariablen unabhängig.

- Skizzieren Sie zunächst die Lage der Energieniveaus des Wasserstoff-Atoms bis zur Hauptquantenzahl $n=4$. Welche Werte können die Quantenzahlen l und m jeweils annehmen?
- Das Wasserstoffatom wird mit einer Lichtquelle vom Grundzustand in einen Zustand mit $n=4$ angeregt. Berechnen Sie die Anregungsenergie und die dazu benötigte Wellenlänge des Lichts.
- Welche Endzustände können durch das Photon aus 3b) angeregt werden, und welche Endzustände können von diesem Zustand aus durch Photonabstrahlung erreicht werden? Kennzeichnen Sie diese durch die drei Quantenzahlen (n, l, m) und zeichnen Sie den Übergang in das Termschema des Wasserstoffs ein. (*Hinweis:* Wann sind Übergänge erlaubt?)
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron im Wasserstoffkern befindet (Kugel mit Radius 1 fm)?
Hinweis: Im Bereich des Kerns kann $\psi(r)$ als konstant angenommen werden (warum?); dies ermöglicht die einfache Berechnung des notwendigen Volumenintegrals.

Aufgabe 4: Elektrische Leitfähigkeit

An einer stromdurchflossenen Silberschicht von 10 cm Länge mit einem rechteckigen Querschnitt von $0,1 \cdot 5 \text{ mm}^2$ wird ein Spannungsfall von 0,1 V gemessen. Eigenschaften von Silber: Dichte $\rho_{\text{Ag}} = 10,5 \text{ g/cm}^3$, spezifische Leitfähigkeit $\sigma_{\text{Ag}} = 62 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$, Molare Masse $M_{\text{Ag}} = 108 \text{ g/mol}$, Fermi-Energie $E_{\text{F,Ag}} = 5,5 \text{ eV}$.

- Berechnen Sie mit Hilfe der oben angegebenen Eigenschaften von Silber den Strom durch die Silberschicht sowie die mittlere Driftgeschwindigkeit der Elektronen (ein Leitungselektron pro Ag-Atom).
- Geben Sie den Zusammenhang zwischen der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit σ , der Ladungsträgerdichte der Elektronen, n_e , und der mittleren Stoßzeit, τ , an und berechnen Sie diese für Silber.
- Wie groß ist die Geschwindigkeit der Leitungs-Elektronen?
- Berechnen Sie die mittlere freie Weglänge der Elektronen.

Aufgabe 5: Altersbestimmung bei Gesteinen

In einer Gesteinsprobe wird das Verhältnis des Uran-Isotops ^{238}U zu Blei ^{206}Pb gemessen, das über eine radioaktive Zerfallskaskade mit einer Halbwertszeit von $4,5 \cdot 10^9 \text{ a}$ aus dem Uran-Isotop entsteht.

- Geben Sie das radioaktive Zerfallsgesetz an, d. h. die Zahl der nach einer Zeit t noch nicht zerfallenen Kerne; bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen der mittleren Lebensdauer τ und der Halbwertszeit $t_{1/2}$.
- Leiten Sie daraus die Formel für die Zerfallsrate her, also die Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Kerne.
- Nehmen Sie an, dass zum Zeitpunkt des Erstarrens des Gesteins kein ^{206}Pb vorhanden war. Berechnen Sie allgemein eine Formel für das Alter der Gesteinsprobe in Abhängigkeit von der Zahl der Uran- und Blei-Kerne.
- Analog kann man das Alter von Gesteinen auch über den Zerfall von ^{235}U nach ^{207}Pb mit einer Halbwertszeit von $7,1 \cdot 10^8 \text{ a}$ bestimmen. In natürlichem Uran treffen heute auf einen ^{235}U -Kern 140 ^{238}U -Kerne. Nehmen Sie an, dass bei der Entstehung der Erde beide Isotope gleich häufig vorhanden waren und berechnen Sie unter dieser Annahme das Erdalter.

Klausur Moderne Physik: Musterlösung

Aufgabe 1: Kwanten SP

a) $E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$ mit der Ruhemasse m , Impuls \vec{p} und Lichtgeschwindigkeit c

b) $m_0 = 106 \text{ MeV}/c^2$ $\tau = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, $l = 30 \text{ km}$

n.B.W. $l = v \cdot t \rightarrow t = \frac{l}{v} = \frac{l}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v^2 + v^2 \frac{l^2}{c^2 c^2} = \frac{l^2}{c^2} \rightarrow v = \frac{l}{t} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{l^2}{c^2 t^2}}}$ ASP

erweitert ergibt $v = 2,99927 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ \rightarrow muss man aber an der Stelle gar nicht ausrechnen
 man kann auch gleich p berechnen
 $p = m v \approx 5,6 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ mit $m \approx 207 m_e = 207 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ASP

c) In QM Wellenfunktion die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten gibt

- \rightarrow Teilchen $\hat{=}$ Wellenpaket \Rightarrow Ortswahrscheinl.
- \rightarrow selbes gilt im Impulsraum (Fourier-Transform)
- Ist Teilchen genau bestimmt im Ortsraum (delta Funktion) \rightarrow komplett unbestimmt im Impulsraum
- \Rightarrow alle Eigenschaften die wir von Wellen kennen!

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

d) $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + V(x) \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) \rightarrow$ Ansatz $\psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}$
 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = -ik(-i\omega) \psi(x) e^{-i\omega t} = -ik(-i\omega) \psi(x) e^{-i\omega t}$

c) In QM Wellenfunktion die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten gibt

→ Teilchen $\hat{=}$ Wellenfunktion \rightarrow Ortsschärfe

→ selbst gibt im Erprobraum (Feynman Trafo)

Zur Teilchen genau bestimmt im Ortsraum (delta Funktion) \rightarrow komplett unbestimmt im Impulsraum \Rightarrow alles Eigenschaften die wir von Wellen kennen!

$$\sigma_x \cdot \sigma_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

1P

d) $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + V(x) \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) \rightarrow$ Ansatz $\psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}$ o.S.1

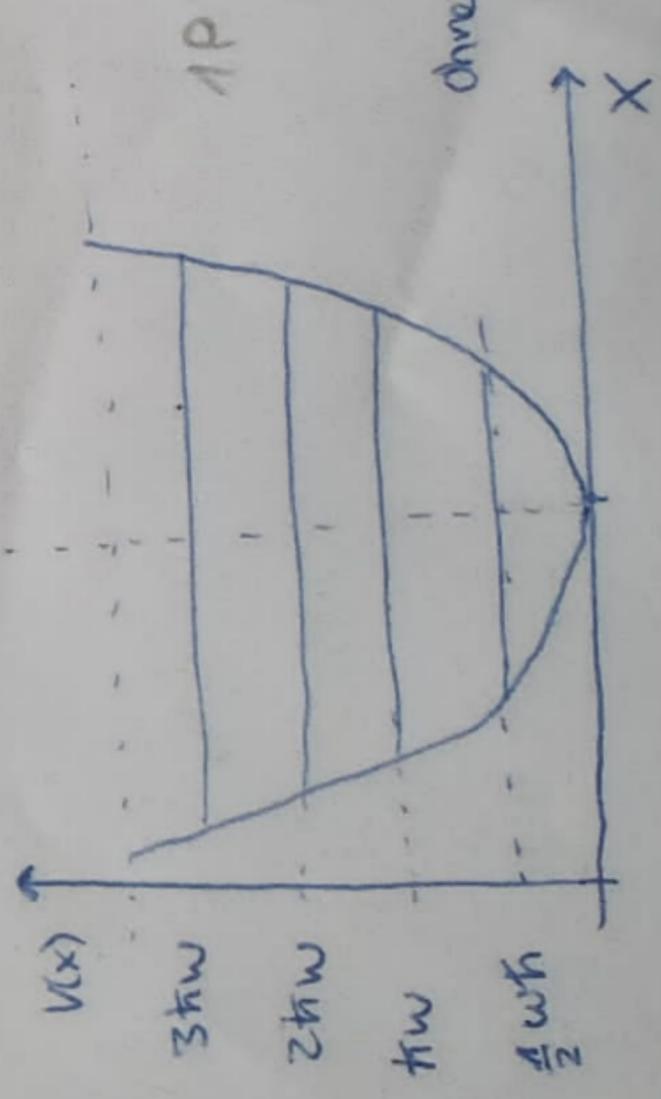
$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} e^{-i\omega t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) e^{-i\omega t} = -i\hbar (-i\omega) \psi(x) e^{-i\omega t}$
 $= \hbar\omega \psi(x) e^{-i\omega t}$
 $= E \psi(x)$
 können

o.S.P

$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$

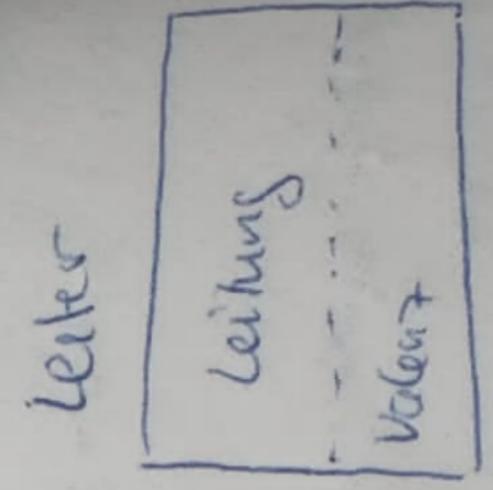
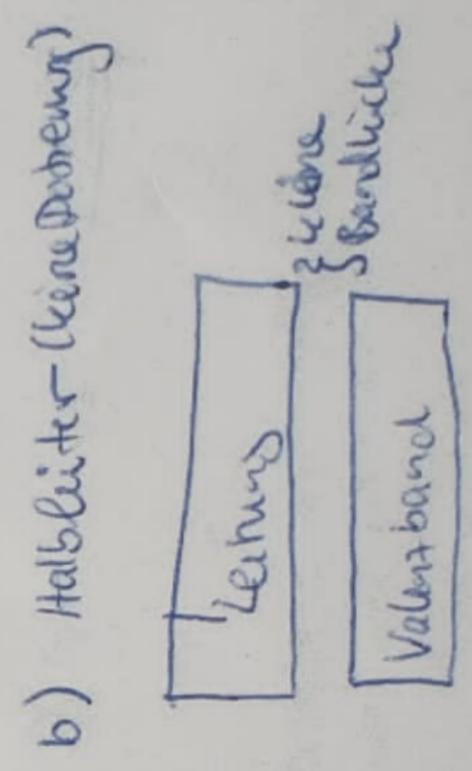
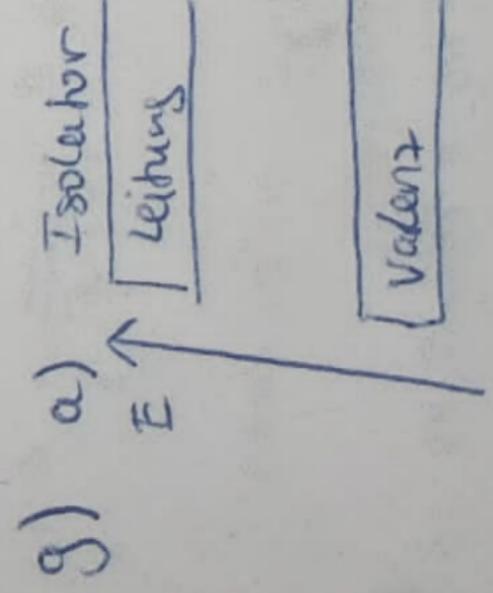
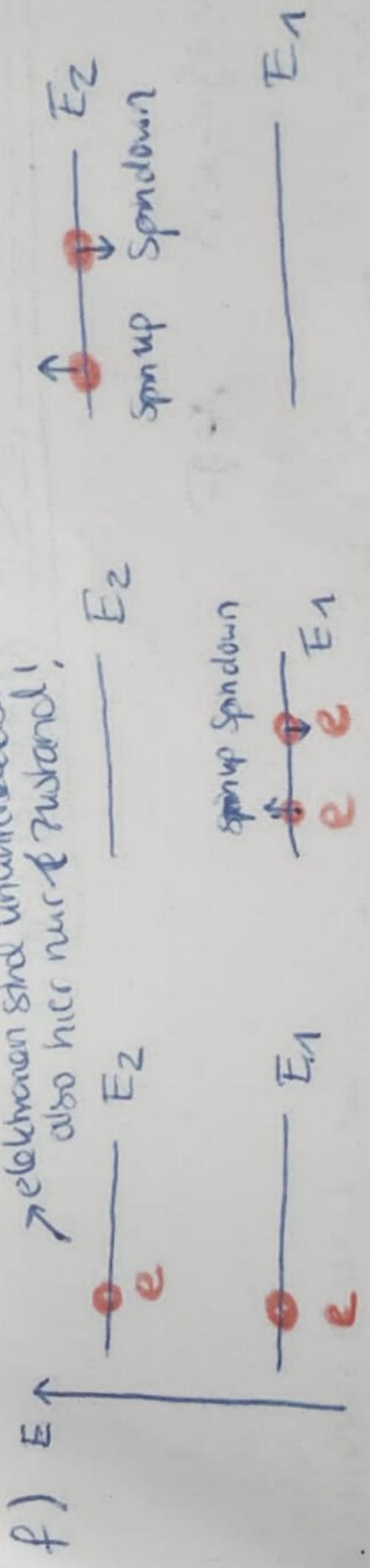
$$V(x) = \frac{1}{2} \beta x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

e)



ohne Kasten schwer zu zeichnen!
 Die Leute brauchen halt eine feste Bestimmung für die Punkte!

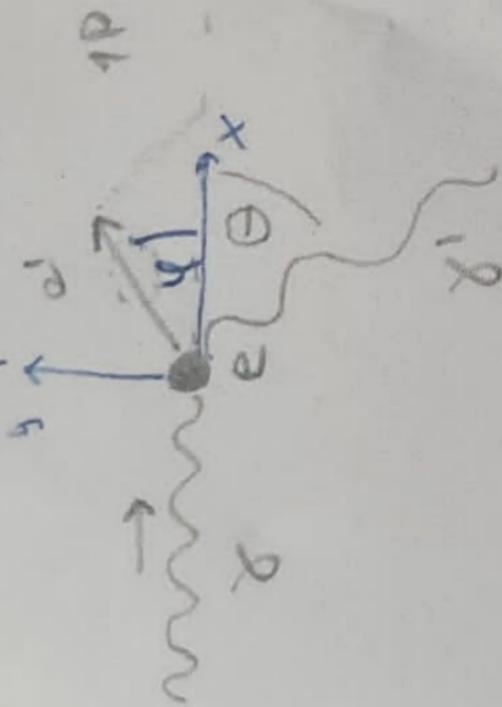
Elektronen sind ununterscheidbar also hier nur 1 Zustand!



h) kurze Reichweite der Austauschweilchen (W/Z-Bosonen) muss haben!

$$\text{Poti Schwäche } W \sim e^{-m r \frac{c}{\hbar}} / r$$

Aufgabe 2: Compton-Effekt



Wellenlänge maximal bei maximalem Impulsübertrag \rightarrow diese findet bei $\theta = 180^\circ$ statt $\uparrow P$

Compton-Kante im Energiespektrum der Elektronen
Energiespektrum der Auslaufenden Photonen hat Minimum bei $\theta = \pi$ $\uparrow P$

b) $p_e + p_\gamma = p_{e'} + p_{\gamma'}$

$$\begin{pmatrix} E_e/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ p_\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{e'}/c \\ p_{e'x} \\ p_{e'y} \\ p_{e'z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\gamma'}/c \\ p_{\gamma'x} \\ p_{\gamma'y} \\ p_{\gamma'z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p_{x'} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + p_{e'x} \rightarrow p_{e'x} = \begin{pmatrix} p_x - p_{x'} \cos\theta \\ -p_{x'} \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

0.5P

Energieerhaltung:

$$\text{oder } E_e + E_\gamma = E_{e'} + E_{\gamma'} \quad \uparrow P$$

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_x = \vec{p}_{x'} + \vec{p}_{e'} \quad 0.5P$$

~~$$\begin{pmatrix} p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{x'} \cos\theta \\ p_{x'} \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{e'x} \\ p_{e'y} \\ p_{e'z} \end{pmatrix}$$~~

$$\begin{pmatrix} p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \cos \theta \\ p_x \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_x' - p_x' \cos \theta \\ -p_x' \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

0.5P

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

:) gibt müssen Energie und Impulserhaltung verwendet werden und Energie Impuls - Berechnung sowie die relativistische Energie Impuls - Berechnung

$$\vec{p}_\gamma^2 = \vec{p}_x^2 + \vec{p}_e^2 + 2\vec{p}_x \cdot \vec{p}_e = p_x^2 + p_e^2 + 2$$

1P

$$E_\gamma + mc^2 = E_{\gamma'} + \sqrt{p_e'^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$

← einsetzen von $\vec{p}_e'^2 = (p_x - p_x' \cos \theta)^2 + (p_x' \sin \theta)^2$ und $p_x = E_\gamma / c$ → Photonen haben keine Ruhemasse!

$$E_\gamma + mc^2 = E_{\gamma'} + \sqrt{m_e^2 c^4 + E_\gamma^2 + E_{\gamma'}^2 \cos^2 \theta - 2E_\gamma E_{\gamma'} \cos \theta + E_{\gamma'}^2 \sin^2 \theta}$$

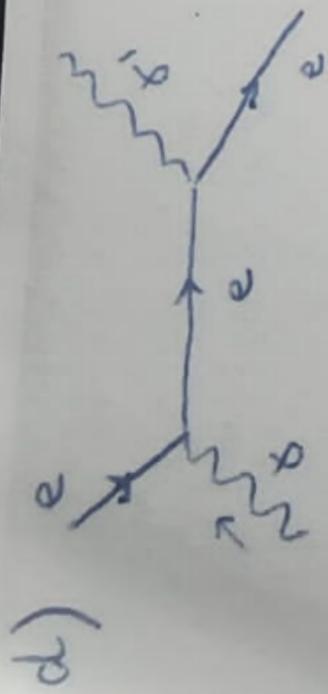
$$\frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \sqrt{m_e^2 c^4 + \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{hc}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2 c^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta}$$

$$\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} + mc^2\right)^2 = m_e^2 c^4 + \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{hc}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2 c^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta$$

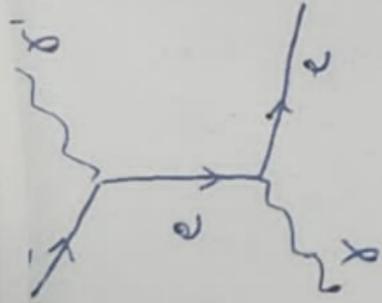
$$\frac{h^2 c^2}{\lambda^2} + \left(\frac{hc}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2 c^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta + \frac{hc}{\lambda} mc^2 - \frac{hc}{\lambda'} mc^2 + m_e^2 c^4 = m_e^2 c^4 + \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{hc}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2 c^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta$$

$$\Rightarrow mc^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = 2hc \left(\frac{1}{\lambda \lambda'} - \frac{1}{\lambda \lambda'} \cos \theta\right) \Rightarrow \frac{2hc}{mc^2} (1 - \cos \theta) = \lambda' - \lambda$$

• insy. 23 P für c



5-channel

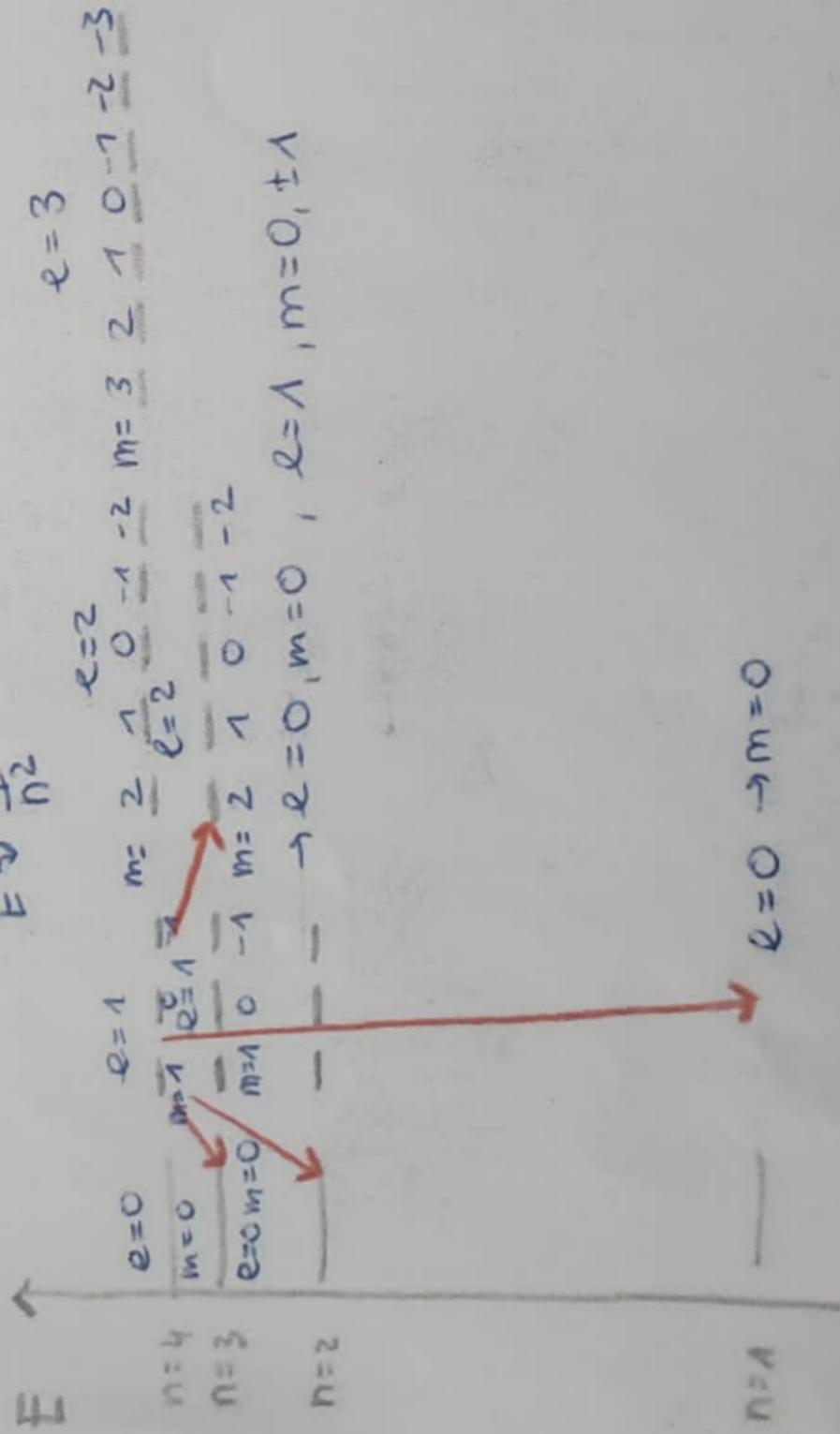


t-channel

Aufgabe 3: Wasserstoffatom

a) zu verwenden sind die folgenden Quantenzahlen n, l, m !

$$E \sim \frac{1}{n^2}$$



$l=3$

$l=2$

$l=1$

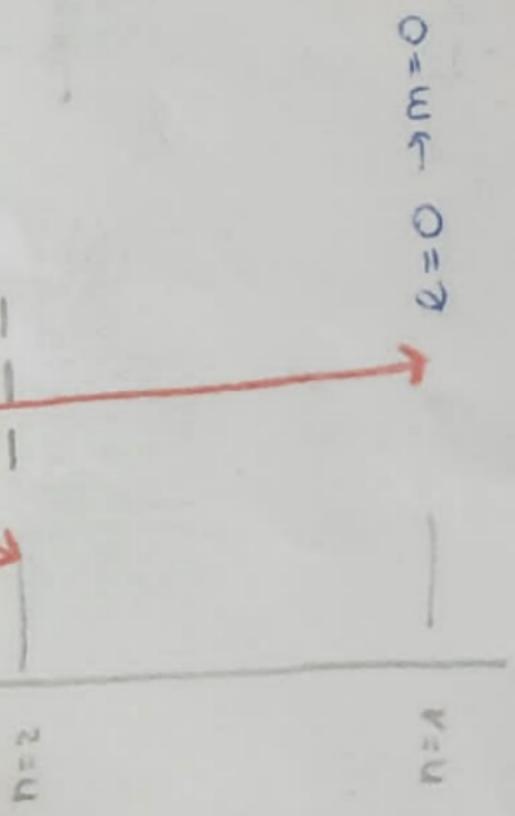
$l=0$

2P

$\rightarrow l=0, m=0, l=1, m=0, \pm 1$

$l=0 \rightarrow m=0$

$E = u/R = u$
 $\Delta Q = \frac{dQ}{dt} = j \cdot A = ne \cdot v_d \cdot A$
 $mit I = \frac{\Delta Q}{dt} = j \cdot A = ne \cdot v_d \cdot A$
 $und ne = s \cdot \frac{I}{A} = ne \cdot v_d = \frac{0.5}{3A}$



b) Energiedifferenz: $\Delta E = |E_1| - |E_4| = |E_d \cdot (\frac{1}{(n=1)^2} - \frac{1}{(n=4)^2})| = 13.6 \text{ eV} (1 - \frac{1}{16})$ 1 P

$= 12.75 \text{ eV}$

$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \Delta E \Rightarrow \lambda = (\frac{\Delta E}{hc})^{-1} = (\frac{12.75 \text{ eV}}{4.1 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}})^{-1} = 96.4 \text{ nm}$ 1 P

c) γ hat Spin 1 \rightarrow Drehimpulsänderung von ± 1 nötig!

\rightarrow wir können vom Grundzustand mit einem Photon nur den Zustand $n=4, l=1$ anregen!

Rest der c mit rot den 1 P

mit $\psi(r)$ konstant innerhalb des Kerns \rightarrow gleiches wie Coulomb-Feld geladener Kugel im inneren konstante Ladungsdichte

d) $w = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^R dr r^2 |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 = \frac{4\pi}{3} R^3 |\psi(R)|^2$ 1 P

$= \frac{4\pi}{3} R^3 (\frac{1}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2R}{a_0}}) \approx 9 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 9 \text{ fm} \approx 0$ 1 P

$R = 1 \text{ fm}, a_0 = 0.525 \text{ nm}$

$$I = U/R = U \cdot \sigma_{\text{spez}} \frac{A}{L} = \frac{0.1 \text{ V} \cdot 62 \cdot 10^6}{2 \text{ m}} \cdot \frac{0.1 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{10 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 31 \text{ A} \quad 1 \text{ P}$$

mit $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = jA = n_e e v_d A \Rightarrow v_d = \frac{I}{A \cdot n_e \cdot e}$

$$\text{und } n_e = \frac{S \cdot N_A}{M} = \frac{10.5 \text{ g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{6 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}}{108 \text{ g/mol}} = 0.58 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

$$\Rightarrow v_d = \frac{31 \text{ A}}{0.5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2 \cdot 0.58 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{cm}^3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = \underline{\underline{0.668}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad 1 \text{ P}$$

$$\text{b) } \sigma = \frac{\tau n_e e^2}{m_e} \Rightarrow \tau = \frac{\sigma m_e}{n_e e^2} = \frac{62 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{5 \text{ cm} \cdot 0.58 \cdot 10^{23} (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2} =$$

$$= \frac{62 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}}{0.58 \cdot 1.6 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-38}} \text{ s} = \frac{62 \cdot 9.1 \cdot 10^{-16}}{0.58 \cdot 16^2} \text{ s} = 3.8 \cdot 10^{-14} \text{ s} \quad 1 \text{ P}$$

$$= \sqrt{\frac{42 \cdot 55 \text{ eV}}{511 \cdot 105 \text{ eV}}}$$

$$= \sqrt{2EF}$$

$$v_e =$$

$$0.5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2 \cdot 0.58 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{cm}^3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 0.668 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad 1 \text{ P}$$

b) $\sigma = \frac{\tau n e e^2}{m_e} \Rightarrow \tau = \frac{\sigma m_e}{n_e e^2} = \frac{62 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{52 \text{ m} \cdot 0.58 \cdot 10^{23} (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2} =$
 $= \frac{62 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}}{0.58 \cdot 1.6 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-38}} \text{ s} = \frac{62 \cdot 9.1}{0.58 \cdot 16} \cdot 10^{-16} \text{ s} = 3.8 \cdot 10^{-14} \text{ s} \quad 1 \text{ P}$

c) Fermi-geschwindigkeit $v_F \Rightarrow E_F = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v_F = \sqrt{\frac{2 E_F}{m}} = \sqrt{\frac{42.55 \text{ eV}}{511 \cdot 10^6 \text{ eV}} \cdot c}$
 $= 1.4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad 2 \text{ P}$

d) mittlere freie Weglänge $l = \tau v_F = 5.3 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad 1 \text{ P}$

Aufgabe 5:

a) $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$
 $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-T_{1/2}/\tau} \Rightarrow \tau \ln(2) = T_{1/2}$ 1P

b) ~~$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$~~ 1P

$r = -\frac{dN}{dt} = N_0 \lambda e^{-t/\tau} = \frac{N_0 e^{-t/\tau}}{N_0(1 - e^{-t/\tau})} = \frac{1}{(e^{t/\tau} - 1)}$ 1P

c) $\frac{N_u}{N_{pb}} = \frac{N_u}{N_{pb} + N_u}$ 1P

$\Rightarrow e^{t/\tau} = \frac{N_{pb} + 1}{N_u} \Rightarrow t = \ln\left(\frac{N_{pb} + 1}{N_u}\right) \tau = \ln\left(\frac{N_{pb}}{N_u} + 1\right) \frac{T_{1/2}}{\ln(2)}$ 1,5P

$\Rightarrow e^{-t/\tau} = e^{-t\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau}\right)}$ 1,5P

d) $\frac{N_{u235}}{N_{u238}} = \frac{N_{0u235} e^{-t/\tau_1}}{N_{0u238} e^{-t/\tau_2}}$ 1,5P

$\Rightarrow t_{\text{Erde}} = \ln\left(\frac{N_{u238}}{N_{u235}}\right) \cdot \left(\frac{1}{T_{1/2,1}} - \frac{1}{T_{1/2,2}}\right)^{-1} = \frac{\ln(140)}{\ln(2)}$ 1P

$= 2,6 \cdot 10^9 \text{ a} \approx 2,6 \text{ Milliarden Jahre}$
 $= 6$