Karlsruher Institut für Technologie

Übungen zur Vorlesung Moderne Physik für Lehramtskandidaten, Geophysiker, Meteorologen und Ingenieurpädagogen	
Sommersemester 2023 Prof. D. Hunger, M.Sc. J. Hessenauer	**Fakultät für Physik** Physikalisches Institut

Übungsblatt Nr. 6
Operatoren und Schrödingergleichung

Ausgabe: 22.05.2023 Besprechung: 06.06.2023

Aufgabe 1 Operatoren und Erwartungswerte Man kann sich vorstellen, dass Operatoren bequeme Abkürzungen für mathematische Rechenoperationen sind: Ein Operator führt eine bestimmte Operation an einer Größe durch. Der Gradient $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$ ist beispielsweise ein Operator. Er wird auf einen Skalar angewendet und liefert als Ergebnis der Operation einen Vektor.

a) Nennen Sie ein paar weitere mathematische Operatoren. **[0.5P]**

b) Wird ein Operator $\hat{O}$ auf eine Funktion $f(x)$ angewendet und ergibt sich als Ergebnis dieser Operation der Ausdruck $a \cdot f(x)$, mit $a \in \mathbb{C}$, so nennt man $f(x)$ Eigenfunktion von $\hat{O}$ und a Eigenwert von f bezüglich $\hat{O}$. Überprüfen Sie, ob $f_1(x) = \exp(ax)$, $f_2(x) = \sin(-iax)$ und $f_3(x) = a + bx + cx^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ Eigenfunktionen von $\hat{O}_1$ und $\hat{O}_2$ sind und geben Sie ggf. die Eigenwerte an. Der Operator $\hat{O}_1$ sei die zweite Ableitung nach x und der Operator $\hat{O}_2$ sei das unbestimmte Integral über x. **[1P]**

c) Wendet man einen Operator auf die quantenmechanische Beschreibung eines Zustands, d.h. seine Wellenfunktion, an, dann erhält man die dazugehörige physikalische Größe als Eigenwert (wenn die Wellenfunktion eine Eigenfunktion des Operators ist). **[1P]**

- Zeigen Sie am Beispiel des freien Teilchens ($\Psi(\vec{x}) = A \cdot \exp(i\vec{k}\vec{x})$), dass der Energieoperator $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + E_{pot}(\vec{x})$ angewendet auf diese Wellenfunktion die Energie des Zustands ergibt.
- Zeigen Sie am gleichen Beispiel, dass der Impulsoperator $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ angewendet auf diesen Zustand den Impuls des Zustands ergibt.

d) Welche Bedingung muss ein mathematischer Operator erfüllen, um mit einer physikalisch messbaren Größe verknüpft zu sein? Solche Operatoren werden als Observablen bezeichnet. **[0.5P]**

e) Betrachten Sie noch einmal die Wellenfunktion von Blatt 5 Aufgabe 5:

$$\Psi(r) = N \frac{e^{ip_0 r/\hbar}}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte für den Ort$\langle r\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dr \Psi^*(r) r \Psi(r)$ und den Impuls $\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dr \Psi^*(r) \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}\right) \Psi(r)$ des Teilchens. **[2P]**

Aufgabe 2 Schrödingergleichung

a) Zeigen Sie, dass reelle ebene Wellen der Form $\Psi(x,t) = A\cdot\sin(kx-\omega t)$ mit $A \neq 0$ keine Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung für ein freies Teilchen ($V = 0$) in einer Dimension sind. **[0.5P]**

b) Zeigen Sie, dass komplexe ebene Wellen der Form $\Psi(x,t) = A \cdot \exp\left[i(kx - \omega t)\right]$ Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung für freie Teilchen sind. **[0.5P]**

c) Zeigen Sie, dass ein Wellenpaket der Form $\Psi(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \exp\left[i(kx - \omega t)\right] dk$ eine Lösung der zeitabhängigen, freien Schrödingergleichung ist. **[0.5P]**

d) Leiten Sie durch Produktansatz, $\Psi(x,t) = \psi(x)\cdot\exp[-i\omega t]$, die stationäre Schrödingergleichung für $\psi(x)$ her. Starten Sie wieder von der zeitabhängigen Schrödingergleichung für ein freies Teilchen. **[0.5P]**

Aufgabe 3 Quantenteilchen im eindimensionalen Kastenpotential

Ein Elektron ist in einem Raumgebiet $[0\,;\,a]$ eingeschlossen. Das bindende Potential kann im Aussenbereich als unendlich gross angenommen werden, während es im Inneren konstant Null ist.

a) Bestimmen Sie die Lösungen für die Wellenfunktion $\Psi(x)$ mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung. Skizzieren Sie den Verlauf von $\psi(x)$ und von $|\psi(x)|^2$ für die Lösungen zu den niedrigsten drei Energieniveaus, $n = 1, 2, 3$. Welche Energieniveaus gibt es? **[1P]**

b) Das Elektron befinde sich im Grundzustand. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, es im Intervall $[0.4\,a\,;\,0.6\,a]$ zu finden? **[0.5P]**

c) Berechnen Sie den Erwartungswert des Impulses. (Hilfe: $< p >= \langle\psi|\mathbf{P}|\psi\rangle = \int \psi^*\mathbf{P}\psi dx$ mit dem Impuls-Operator $\mathbf{P} = -i\hbar\frac{d}{dx}$.) Hängt der Erwartungswert von n ab? **[0.5P]**

d) Berechnen Sie die Breite der Impulsverteilung (angegeben als Standardabweichung σ_p, d.h. die Wurzel der Varianz) in Abhängigkeit von n. (Hilfe: Definition der Varianz einer Observablen o: ${\sigma_o}^2 = \left\langle(\mathbf{O}- < \mathbf{O} >)^2\right\rangle =< \mathbf{O}^2 > - < \mathbf{O} >^2= \left\langle\Psi|\mathbf{O}^2|\Psi\right\rangle - \langle\Psi|\mathbf{O}|\Psi\rangle^2$. (Konkrete Rechenarbeit können Sie sich ersparen, wenn Sie bedenken, dass die Lösungen die Schrödingergleichung $\mathbf{H}\psi_n = E_n\psi_n$ erfüllen, und der Hamilton-Operator mit dem Impulsoperator über $2m\mathbf{H} = \mathbf{P}^2$ zusammenhängt.) **[1P]**