Übungen zur Vorlesung Moderne Physik für Lehramtskandidaten, Geophysiker, Meteorologen und Ingenieurpädagogen	
Sommersemester 2023 Prof. D. Hunger, M.Sc. J. Hessenauer	**Fakultät für Physik** Physikalisches Institut

Übungsblatt Nr. 7
Potentialtöpfe und harmonischer Oszillator

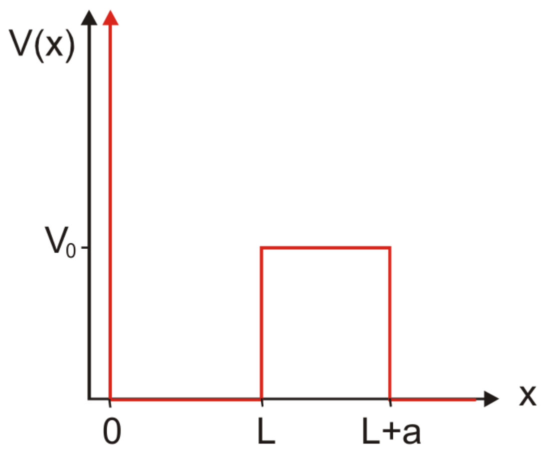
Ausgabe: 05.06.2023 Besprechung: 13.06.2023

Aufgabe 1: Zweidimensionaler Potenzialtopf und Entartung von Energiezuständen

In der Vorlesung (und Blatt 6 A3) wurde das Teilchen (als Materiewelle) in einem Kastenpotential behandelt. Machen Sie sich an dem folgenden Beispiel klar, was entartete Zustände sind. Überlegen Sie sich die Quantenzahlen ($n_y,\ n_x \in \mathbb{N}$) bei einem zweidimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen (harten) Wänden. Skizzieren Sie E_{nx}, E_{ny} und $E = E_{nx} + E_{ny}$. Betrachten Sie die Fälle $a = b$ und $a = 2 \cdot b$. Es ist: a = Länge des Kastens in x-Richtung und b = Länge des Kastens in y-Richtung.
Gehen Sie im Fall $a = b$ bis $(n_x^2 + n_y^2) = 18$ und im Fall $a \neq b$ bis $(n_x^2 + 4 \cdot n_y^2) = 25$. Gibt es in diesem Bereich Quantenzahlkombinationen ($n_y,\ n_x$) mit gleicher Energie (sogenannte "entartete Zustände")? **[2P]**

Aufgabe 2: Potenzialtopf - endlich hohe Wände

Ein Elektron befindet sich in einem Potentialkasten, der bei $x = 0$ durch eine unendlich hohe Wand begrenzt ist und bei $x > L = 1 \cdot 10^{-10}$ m (typischer Atomdurchmesser) durch eine Potentialbarriere mit der Dicke $a = 0,1$ nm und der Höhe $V_0 = 1000$ eV (siehe Skizze).



a) Skizzieren Sie den Verlauf der Wellenfunktion, wenn sich das Elektron im Potentialkasten im Grundzustand befindet. Nehmen Sie hierfür an, dass die Barriere auch auf der rechten Seite unendlich hoch ist. Wie muss die Skizze aussehen, wenn der Wall auf der rechten Seite nur noch endlich hoch ist (wie in der Skizze) und das Elektron tunneln kann? **[0.5P]**

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung für die Gebiete $V(x) = 0$ und $V(x) \neq 0$ die Wellenzahlen k_1 und k_2 (bzw. $k_2 = \alpha$) in Abhängigkeit von E und V_0 und berechnen Sie dann den Transmissionskoeffizienten t für eine Transmission durch die Potenzialbarriere für ein Elektron im Grundzustand (Näherung: $E = E_1$ wie bei unendlich hohen Wänden), wenn der Transmissionskoeffizient t gegeben ist durch:

$$\left|\frac{\text{Amplitude heraustunnelnde Welle}}{\text{Amplitude hereintunnelnde Welle}}\right|^2 = t = \left|\frac{\Psi(L+a)}{\Psi(L)}\right|^2 .$$

Verwenden Sie

$$\Psi(x) \quad = \quad A(\exp(ik_1x) + R \cdot \exp(-ik_1x))$$

für die Welle im Bereich $V(x) = 0$ und

$$\Psi(x) \quad = \quad A_T \cdot \exp(ik_2x) = A_T \cdot \exp(-\alpha x)$$

für die Welle im Bereich $V(x) = V_0$. **[1P]**

c) Betrachten Sie nun die drei folgenden Szenarien: i) V_0 ist doppelt so groß, ii) der Wall ist doppelt so breit und iii) das Teilchen tunnelt aus dem ersten angeregten Zustand. Wie groß ist jeweils t für die Szenarien i-iii? **[1P]**

d) Ein Elektron bewegt sich mit einer der Grundzustandsenergie entsprechenden Geschwindigkeit (nicht-relativistisch) im Potentialtopf zwischen 0 und L periodisch hin und her ($0 < x < L$). Verwenden Sie wieder die Näherung, dass die Grundzustandsenergie in etwa der Energie des Grundzustands E_1 bei unendlich hohen Wänden entspricht. Berechnen Sie die benötigte Zeit τ für einen Umlauf. Wie groß ist die Transmissionsrate pro Umlauf, d.h. t/τ (t ist der Transmissionskoeffizient) bzw. deren Kehrwert τ/t ? Man nennt τ/t auch die "Zerfallszeit" des Elektrons im Potentialtopf. **[1P]**

Aufgabe 3: Zwei Teilchen im Kasten Zwei identische, ununterscheidbare Teilchen befinden sich in einem eindimensionalen Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden, d.h. $V(x) = 0$ für $0 < x < L$ und ∞ überall sonst. Geben sie die Zwei-Teilchen-Schrödingergleichung für diesen Fall an. Bestimmen Sie die Lösungen und möglichen Energien für

a) zwei identische Bosonen **[1P]**

b) zwei identische Fermionen. **[1P]**
Hinweis: Zeigen Sie zuerst , dass ein Produktansatz $\Psi_{1,2}(x_1, x_2) = \Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2)$ die Schrödingergleichung erfüllt, wobei Ψ_1,Ψ_2 Lösungen der Schrödingergleichung für ein Teilchen sind. Konstruieren Sie dann daraus Wellenfunktionen mit der richtigen Symmetrie.

Aufgabe 4: Harmonischer Oszillator

Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator, d.h. ein Teilchen mit Masse m und Auslenkung x, auf das eine Rückstellkraft $F = -\beta x$ wirkt.

a) Zeigen Sie, dass mit der angegebenen Kraft das Potential $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\beta x^2$ verknüpft ist und stellen Sie die Schrödingergleichung auf. **[0.5P]**

b) Zeigen Sie, dass $\Psi(x) = Ae^{-ax^2}$ eine Lösung ist, indem Sie $\Psi(x)$ explizit in die Schrödingergleichung einsetzen und den Parameter a sowie den Energieeigenwert E bestimmen. **[1P]**
(Hinweis: Eine Gleichung vom Typ $ax^2 + b = 0$ ist nur dann für alle x erfüllt, wenn $a = b = 0$ gilt.)

c) Bestimmen sie die Wellenfunktion des harmonischen Oszillators im Grundzustand die Normierungskonstante A sowie die Varianz von Ortskoordinate x und Impuls p. Vergleichen Sie mit der Unschärferelation. **[1P]**

(Tipp: Vermeiden Sie Rechenarbeit, indem Sie ausnutzen:
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-x^2/(2\sigma^2)\, dx \;=\; 1$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-x^2/(2\sigma^2)\, dx \;=\; \sigma^2$)

Weitere Informationen und Updates zur Vorlesung/Übung finden Sie auch hier:
`https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2093879&client_id=produktiv`