

**Übungen zur Vorlesung Moderne Physik für Lehramtskandidaten,
Geophysiker, Meteorologen und Ingenieurpädagogen**
Sommersemester 2023

Prof. D. Hunger, M.Sc. J. Hessenauer

Fakultät für Physik

Physikalisches Institut

**Übungsblatt Nr. 8
Das Wasserstoffatom**

Ausgabe: 12.06.2023

Besprechung: 20.06.2023

Aufgabe 1: Winkelteil der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms und quantenmechanischer Drehimpuls

In der Vorlesung haben Sie bereits gesehen dass der quantenmechanische Drehimpulsoperator $\hat{L} = \hat{x} \times \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{x} \times \vec{\nabla}$ in Kugelkoordinaten geschrieben werden kann als

$$\hat{L} := i\hbar \begin{bmatrix} \sin \Phi \frac{\partial}{\partial \Theta} + \cot \Theta \cos \Phi \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ -\cos \Phi \frac{\partial}{\partial \Theta} + \cot \Theta \sin \Phi \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ -\frac{\partial}{\partial \Phi} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Damit gilt:

$$\hat{L}^2 = -\frac{\hbar^2}{\sin^2 \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \right). \quad (2)$$

- a) Geben Sie den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten an. Wie können Sie den Operator \hat{L}^2 durch den Laplace-Operator Δ ausdrücken? **[0.5P]**
- b) Die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\Theta, \Phi)$ sind als Eigenfunktionen des Winkelteils des Laplaceoperators definiert, ihre Eigenwertgleichung lautet

$$\left(\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \right) Y_l^m(\Theta, \Phi) = -l(l+1) Y_l^m(\Theta, \Phi) \quad (3)$$

und damit gilt

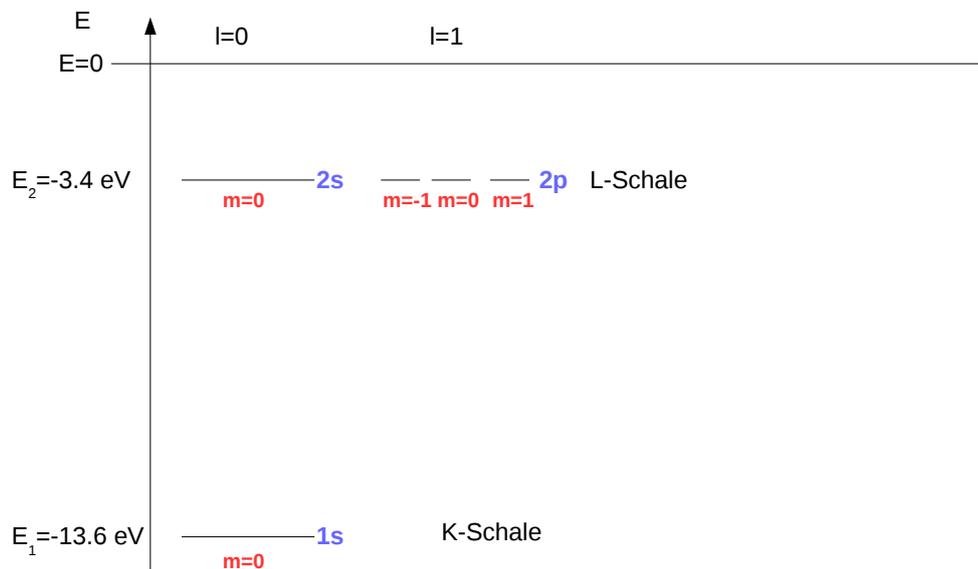
$$\hat{L}^2 Y_l^m(\Theta, \Phi) = l(l+1) \hbar^2 Y_l^m(\Theta, \Phi). \quad (4)$$

Berechnen Sie explizit (d.h. durch Anwenden des \hat{L}^2 -Operators) die Eigenwerte für Y_0^0 und Y_1^{-1} . Vergleichen Sie mit den erwarteten Eigenwerten nach Gl. 4. **[1P]**

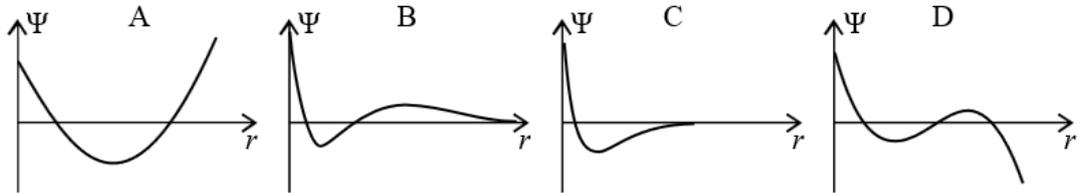
- c) Gegeben sei die Wellenfunktion eines Elektrons im Wasserstoffatom $\Psi(r, \Theta, \Phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\Theta, \Phi)$. Geben Sie den Erwartungswert von \hat{L}^2 und den Erwartungswert von $|\hat{L}|$ an. *Hinweis: Die Eigenwerte von L^2 und L_z sind aus der Vorlesung bekannt. Es ist keine aufwendige Rechnung nötig.* [1P]
- d) Gegeben sei wieder die Wellenfunktion Ψ aus Teilaufgabe c). Berechnen Sie **explizit** den Erwartungswert von $\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\Phi}$. *Hinweis: Schauen Sie sich dazu an, wie die Kugelflächenfunktionen von Φ abhängen.* [0.5P]
- e) Die Wellenfunktion Ψ aus Teilaufgabe c) ist keine Eigenfunktion von \hat{L}_x und \hat{L}_y , jedoch von $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$. Machen Sie dieses Ergebnis plausibel (z.B. grafisch) und geben Sie den Erwartungswert von $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$ an. *Hinweis: Versuchen Sie $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$ durch Potenzen von L und L_z auszudrücken. Was ist die geometrische Interpretation?* [0.5P]
- f) Der Drehimpuls ist im Betrag und in einer Raumrichtung, der z -Richtung quantisiert. Zeigen Sie anhand der Erwartungswerte von \hat{L}_z und \hat{L} , dass der Drehimpuls niemals exakt entlang der Quantisierungsachse ausgerichtet sein kann. [0.5P]

Aufgabe 2: Quantenzahlen und Termschema

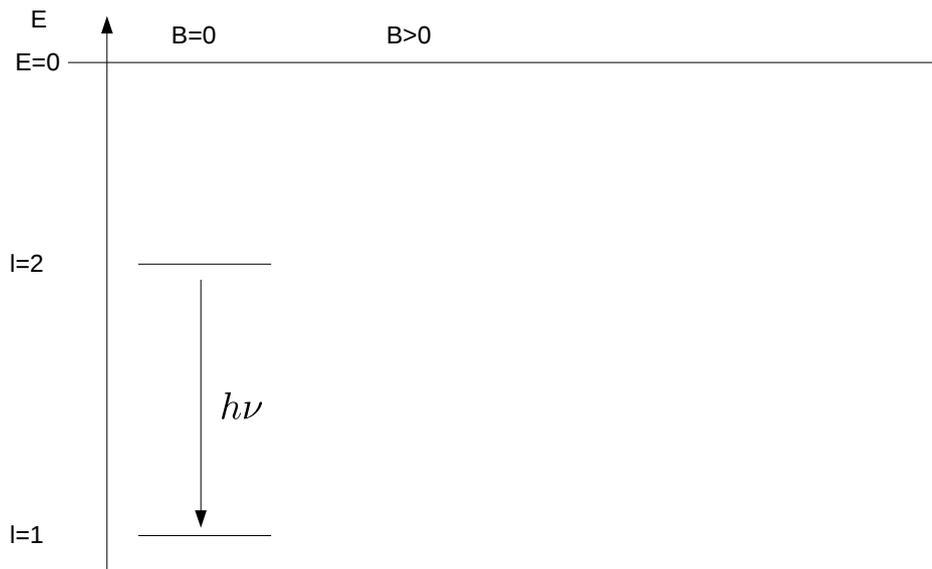
- a) Welche Quantenzahlen beschreiben den Zustand eines Elektrons im Wasserstoffatom? Erläutern Sie ihre Bedeutung und geben Sie ihren Wertebereich an. [0.5P]
- b) Die Energiezustände eines Elektrons im Wasserstoffatom hängen nur von n ab. Wie viele unterschiedliche Eigenzustände (definiert durch die Quantenzahlen n, l, m) gehören zu jedem Energiezustand? Begründen Sie Ihre Antwort. [1P]
- c) Die untenige Skizze stellt das Termschema des Wasserstoffatoms für die K- ($n=1$) und die L- ($n=2$) Schale dar. Ergänzen Sie um die M- ($n=3$) und N- ($n=4$) Schale. [0.5P]



- d) Wir betrachten nun nur den radialsymmetrischen Anteil der Zustände des Wasserstoffatoms und den zugehörige radiale Abhängigkeit der Wellenfunktion. Wählen Sie unter den Diagrammen A bis D den skizzierten Graphen der Wellenfunktion zu $n = 2$ und $n = 3$ aus und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. [0.5P]



Aufgabe 3: Normaler Zeeman-Effekt, quantenmechanisch Beim *normalen* Zeeman-Effekt beobachtet man eine Aufspaltung von einer Spektrallinie in *drei* Spektrallinien, sofern ein externes Magnetfeld angelegt wird. Klassisch konnten wir diese Beobachtung mit der Präzession des Bahndrehimpulsvektors des Elektrons im externen Magnetfeld erklären. Wir betrachten nun das quantenmechanische Wasserstoffatom ohne externes Magnetfeld. In untiger Skizze sind zwei Energieniveaus mit $l = 1$ und $l = 2$ eingezeichnet.



- a) Geben Sie die möglichen Energie des ausgesandten Photons beim eingezeichneten Übergang an (keine Zahlenwerte, nur die Formel). [0.5P]
- b) Dem Bahndrehimpuls ist ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu} = -\gamma\vec{L}$ zugeordnet, das in Gegenwart eines externen Magnetfeldes mit diesem wechselwirkt: wir stellen uns ein homogenes Magnetfeld \vec{B} entlang der z -Achse vor: $\vec{B} = (0, 0, B_z)$. In Gegenwart des Magnetfeldes beginnt der Bahndrehimpulsvektor aufgrund des wirkenden Drehmoments $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ um die z -Achse zu präzedieren. Der magnetische Dipol besitzt im Magnetfeld eine potenzielle Energie V , die von seiner Projektion auf die Magnetfeld-

richtung abhängt: $V = \gamma \vec{L} \vec{B} = \gamma l_z B_z = \gamma \hbar m B_z$. Hinweis: γ ist das gyromagnetische Verhältnis des Elektrons $\gamma = e/(2m_e)$.

Zeichnen Sie in untenge Skizze die Aufspaltung der Energieniveaus bei angeschaltetem Magnetfeld für die verschiedenen magnetischen Quantenzahlen m ein. [0.5P]

c) Berechnen Sie allgemein die Energiedifferenz zwischen zwei Energieniveaus mit $\Delta m = \pm 1$, die zum selben Orbital gehören. [0.5P]

d) Beim normalen Zeeman-Effekt wird der Spin des Elektrons vernachlässigt (für schwache Magnetfelder zulässig). Der Gesamtdrehimpuls des Elektrons ist also durch seinen Bahndrehimpuls gegeben. Beim Übergang zwischen zwei Zuständen mit verschiedenen l ändert sich der Bahndrehimpuls des Elektrons und es wird ein Photon emittiert oder absorbiert. Da Drehimpulserhaltung gilt, muss die Drehimpulsänderung des Elektrons vom Photon getragen werden. Das Photon trägt als Gesamtdrehimpuls nur seinen Eigendrehimpuls, der durch die Spinquantenzahl s definiert ist. Es ergibt sich, dass nur Übergänge mit $\Delta l = \pm 1$ Drehimpulserhaltung gewährleisten.

Zusätzlich gibt es die Auswahlregel $\Delta m = \pm 1, 0$ für optische Übergänge. Diese Auswahlregel beruht auf der Polarisation des emittierten oder absorbierten Lichts. $\Delta m = \pm 1$ entspricht rechts zirkulär (+1) oder links zirkulär (-1) polarisiertem Licht, $\Delta m = 0$ entspricht linear polarisiertem Licht.

Zeichnen Sie alle nach den Auswahlregeln für elektronische Übergänge erlaubten Übergänge in obiger Skizze ein und geben Sie die Energie der jeweiligen Photonen an. Vergleichen Sie mit der klassischen Erwartung. Worin liegt der Hauptunterschied zwischen der klassischen Erklärung und der quantenmechanischen Erklärung? [1P]

Aufgabe 4: Wellenfunktion von Positronium: In der Vorlesung wurde der Hamiltonoperator für das Wasserstoffatom mit einem Elektron eingeführt. Wie würde der Hamiltonoperator für Positronium aussehen, d.h. für ein "Atom", das aus einem Elektron und einem Positron (dem Antiteilchen des Elektrons) besteht? Berechnen Sie damit den Bohr'schen Radius von Positronium. [1P]

Hinweis: Beachten Sie welche Näherungen in der VL für die Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms verwendet wurden. Wie müssen Sie diese anpassen, um die Ergebnisse für das Wasserstoffatom übernehmen zu können?