Übungen zur Astroteilchenphysik	**WS 12/13**
1. Übungsblatt Bearbeitung bis Mi. 31.10.2012	**24.10.2012**

1. Entfernung Erde - Mond:

Während der Mondmissionen wurde auf dem Mond ein System von Retroreflektoren installiert, der aus 10x10 Spiegeln von jeweils 3,8cm Durchmesser besteht. Mithilfe der Methode der Laufzeitmessung von Laserpulsen kann die Entfernung zum Mond mittlerweile mit Millimetergenauigkeit bestimmt werden. Eine der Messkampagnen wird am *Apache Point Observatory* durchgeführt.

a) Bestimmen sie die Laufzeit Δt eines Laserpulses von der Erde zum Mond und zurück.

b) Das APOLLO Experiment sendet Laserpulse mit $\tau = 115$ ps (FWHM) Dauer zum Mond, deren Intensitätsmaximum etwa auf 25 ps genau bestimmt werden kann. Der hoch kollimierte Laserpuls erleidet eine Divergenz von nur $\delta_L = 1''$. Leider verursachen die Retroreflektoren mit $\delta_R = 7''$ eine größere Divergenz. Welche Ausmaße (Durchmesser D_M und Dicke d) hat die Photonenscheibe am Ort des Retroreflektors? Welchen Durchmesser D_E erreicht der reflektierte Laserpuls auf der Erde?

c) Wie viele Photonen befinden sich in einem Laserpuls der Energie $E = 115$ mJ? Die Wellenlänge des grünen Laserlichtes beträgt $\lambda = 532$ nm.

d) Wie viele Photonen erreichen pro Laserpuls das 3,5 m-Teleskop auf dem *Apache Point*?

2. Entfernungsbestimmung zu benachbarten Sternen:

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Entfernungsbestimmung von Sternen ist die Kenntnis des Unterschiedes zwischen ihrer scheinbaren und absoluten Helligkeit.

a) Leiten sie aus der astronomischen Größenklassendefinition $m_1 - m_2 = -2{,}5 \cdot \log \frac{S_1}{S_2}$ eine Formel für den Entfernungsmodul $(m - M)$ ab, wobei M die Helligkeit in der Entfernung 10 pc sein soll (absolute Helligkeit).

b) Die Entfernung zu dem Stern *Beteigeuze* wurde zu 200 pc bestimmt. Bestimmen sie die Leuchtkraft von *Beteigeuze* wenn die visuelle Helligkeit $m_V = 0.8$ beträgt. Die interstellare Absorption (Extinktion) beträgt $A_V = 1^m\!.3$.
Die bolometrische Helligkeit ergibt sich aus $M_{bol} = M_V - B.C.$ wobei $B.C.$ die bolometrische Korrektur ist, die im Fall von *Beteigeuze* $B.C. = 1^m\!.6$ beträgt.

3. Die Größe des Universums:

Die moderne Kosmologie geht vom sogenannten kosmologischen Prinzip aus. Das heißt, es gibt keine ausgezeichnete Stelle im Kosmos (Homogenität) und das Universum sieht in alle Richtungen gleich aus (Isotropie). Insbesondere gelte dies auch in einem beliebigen

Raumbereich des Universums mit Radius R, in dem sich Teilchen mit der Gesamtmasse M befinden. Die Kugel hat die mittlere Dichte ρ.

a) Stellen sie die Bewegungsgleichung für ein Testteilchen der Masse m am Rand der Kugel auf. Die gesuchte Gleichung (1) hat die Form $\ddot{R} = f(R)$.

b) In der Kugel herrscht der Druck P, der durch die Bewegung der Teilchen zustande kommt (kinetische Energie ≙ anziehender Masse). Damit erhöht sich die mittlere Dichte in der Kugel um einen Beitrag $\rho_P = 3P/c^2$. Stellen sie die erweiterte Bewegungsgleichung (2) auf.

c) Die innere Energie der Kugel ist $U = M \cdot c^2$ mit $M = \rho \cdot V$. Ändert sich ihr Volumen, so gilt aufgrund der Energieerhaltung $dU = -P \cdot dV$. Das geschieht in der Zeit dt und es gilt weiter $\dot{U} = -P \cdot \dot{V}$ (3). Stellen sie die folgende Gleichung (4) auf: $2R\dot{R}\rho + \left(\rho + 3P/c^2\right)R\ddot{R} + R^2\dot{\rho} = 0$

d) Ersetzen sie in Gleichung (4) den Term in Klammern mit Hilfe der Gleichung (2) und isolieren Sie $2\dot{R}\ddot{R}$. Das Resultat sei Gleichung (5). Wenn sie die zeitlichen Ableitungen von $\dot{R}^2$ und $R^2\rho$ bilden und dann die Gleichung über die Zeit integrieren, so erhalten Sie Gleichung (6). Sie beschreibt, wie sich der Kugelradius mit der Zeit ändert. Setzt man den Kugelradius R zur Zeit t in Beziehung zum heutigen Kugelradius R_0, so erhält man den Skalenfaktor $a = R/R_0$. Formuliert man Gleichung (6) mit Hilfe des Skalenfaktors und seiner zeitlichen Ableitung um und berechnet $(\dot{a}/a)^2$, so erhält man die von Friedmann 1920 gefundene Gleichung (7).

e) Die Expansion des Kosmos wird durch die Hubble-Konstante $H = \dot{a}/a$ charakterisiert. Die Materiedichte des Universums ist $\rho = 3 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg/m^3}$. Setzt man die in Aufgabenteil d) auftretende Integrationskonstante gleich Null, so lässt sich mit Hilfe der Friedmann-Gleichung die heutige Hubble-Konstante H_0 berechnen. Welche Folgerung ergibt sich aus dem Vergleich mit dem tatsächlichen Wert $H_0 = 73\ \mathrm{km/(s \cdot Mpc)}$?

f) Das Licht einer weit entfernten Supernova mit der Rotverschiebung z_{SN} legt in dem kleinen Zeitintervall dt die Strecke $ds = c \cdot a^{-1} \cdot dt$ zurück (8). Hierin ist berücksichtigt, dass sich das Licht im expandierenden Raum ausbreiten muss und der Skalenfaktor a wächst. Der Zusammenhang zwischen Skalenfaktor und Rotverschiebung lautet $a = (1+z)^{-1}$. Bilden Sie die Ableitung da/dz, erweitern sie (8) mit da/da und ersetzen sie dort sinnvoll da mit Hilfe der Ableitung. Sie erhalten ds als Funktion von $c, H(z)$, und dz (Gleichung 9). Die Strecke, die das Licht bis zu uns zurückgelegt hat, ist dann das Integral von $z = 0$ bis $z = z_{SN}$ der Gleichung (9). Wie wirkt sich ein im jungen Universum kleines H auf die vom Licht der Supernova zurückgelegte Strecke aus?