

1. Primordiale Häufigkeit von ^4He und Neutrino-generationen:

- a) Berechnen sie das zu erwartende Verhältnis zwischen der Häufigkeit von primordialem Helium zu Wasserstoff für unterschiedliche Anzahlen von Neutrino-generationen: $N_\nu = 3, 4, 5, 6, \dots$

Wie groß ist die prozentuale Änderung des zu erwartenden Verhältnisses bei jeder zusätzlichen Neutrino-generation?

Hinweis: Für $N_\nu = 3$ ist $g_{\text{eff}} = \frac{43}{4}$ und $kT = 0,8 \text{ MeV}$. Die Lebensdauer der freien

Neutronen sei $\tau = 900 \text{ s}$. Nehmen sie an, dass die Produktion von Deuterium und Helium zu einer Zeit stattfand, bei der $kT = 0,05 \text{ MeV}$ war.

- b) Berechnen sie analog zu a) das zu erwartende Häufigkeitsverhältnis für $N_\nu = 3$ falls die Neutronen-Protonen Massendifferenz $1.1 \text{ MeV}/c^2$ bzw. $1.5 \text{ MeV}/c^2$ statt des tatsächlichen Wertes von $1.29 \text{ MeV}/c^2$ wäre (die Lebensdauer der freien Neutronen bleibe hierbei unverändert).

2. Das Schicksal eines geschlossenen Universums

Zeigen sie, dass in einem geschlossenen Universum (Krümmungsparameter $k = +1$) auf den *Big Bang* der *Big Crunch* folgt. Welche maximale Größe erreicht ein solches Universum und wie lange würde es existieren? Gesamtmasse: $M = 10^{23} M_{\text{sol}}$ (Masseerhaltung vorausgesetzt)

Tipp: Integration durch Substitution: $2GM/R - c^2 = c^2 \tan^2 \theta$

3. Das Alter eines (anderen) Universums:

Leiten sie die Formel für ein offenes Universum ($\Omega < 1$) mit einer verschwindenden kosmologischen Konstante und einer vernachlässigbaren Strahlungsdichte. Berechnen sie das Alter des Universums für folgende Ausgangslage:

$$\begin{aligned} \text{offenes Universum mit} \quad & \Omega = 0,45, \\ & \Lambda = 0 \Rightarrow \Omega_\nu = 0 \\ & \rho_r \approx 0 \Rightarrow \Omega_r \approx 0 \\ \text{„offen“} \Rightarrow & \Omega + \Omega_k = 1 \\ \Leftrightarrow & \Omega_k = 1 - \Omega_{(m)} \end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen sie die Substitution $(1+z)^3 = \left(\frac{1-\Omega}{\Omega}\right) \cdot \tan^2 \theta$.