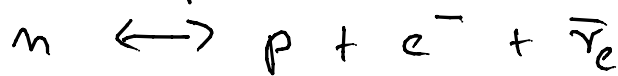
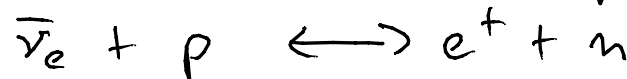


2. Übungsblatt - Aufgabe 1a - "Muster"-Lösung

Primordiale Häufigkeit von  $^4\text{He}$  und Neutrino generationen

Im frühen Universum stehen die Protonen und Neutronen durch die Reaktionen der schwachen Wechselwirkung [1] im thermischen Gleichgewicht:



Wenn nun die Reaktionsrate  $\Gamma$  [1] der schwachen Wechselwirkung kleiner als die Expansionsrate  $H$  [1] des Universums wird, kommt es zum "Ausfrieren" der Neutrinos:

$$\Gamma \sim g_F^2 T^5$$

$\uparrow$  Fermi-Konstante

$$H \sim \sqrt{g_{\text{eff}}} \cdot T^2$$

$\uparrow$  Anzahl der relativistischen Freiheitsgrade

$$\left[ \begin{aligned} g_{\text{eff}} &= \sum_{\text{Boson}} g_B + \frac{7}{8} \sum_{\text{Fermion}} g_F = \\ &= 2 + \frac{7}{8} (2 \cdot 2 + N_V \cdot (2)) = \frac{22 + 7N_V}{4} \end{aligned} \right]$$

$\uparrow$  zwei Polarisationsrichtungen der Photonen

$\uparrow$   $e^\pm$  Spinzustand

$\uparrow$  Anzahl der Neutrino generationen

$\uparrow$   $\nu + \bar{\nu}$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma}{H} \sim \frac{g_F^2 \cdot T^3}{\sqrt{g_{\text{eff}}}} < 1 \Rightarrow k_B T < A \cdot \frac{k_B \cdot g_{\text{eff}}^{1/6}}{g_F^{2/3}}$$

$\uparrow$  Proportionalitätsfaktor

Für drei Neutrinogenerationen ( $N_\nu = 3$ ) gilt:

$$k_B T = 0.8 \text{ MeV} \quad \text{mit} \quad g_{\text{eff}}(N_\nu = 3) = \frac{43}{4}$$

(siehe Hinweis in der Aufgabenstellung)

Somit kann der Proportionalitätsfaktor, die Boltzmann-Konstante und  $g_F^{2/3}$  bestimmt werden:

$$\frac{k_B T}{g_F^{2/3}} = \frac{0.8 \text{ MeV}}{g_{\text{eff}}^{1/6}} = 0.5385 \text{ MeV}$$

Für  $N_\nu$  Neutrinogenerationen folgt:

$$k_B T = 0.5385 \text{ MeV} \cdot g_{\text{eff}}(N_\nu)^{1/6}$$

Damit ergibt sich das Neutron-Proton-Verhältnis [1] zum Zeitpunkt der Entkopplung zu:

$$\frac{n_0}{p_0} = \exp\left(-\frac{(m_n - m_p) c^2}{k_B T}\right)$$

Nun müssen wir noch den Einfluss des Neutronenzerfalls berücksichtigen. Zum Zeitpunkt  $t$  nach dem Ausführen der schwachen WW gibt es noch  $n(t) = n_0 \cdot \exp(-t/\tau)$  Neutronen und

$$p(t) = p_0 + n_0 (1 - \exp(-t/\tau)) \text{ Protonen.}$$

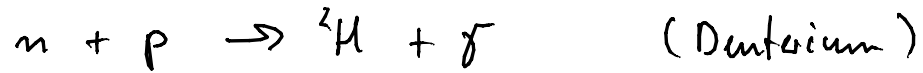
Mit der Lebensdauer  $\tau \approx 900 \text{ s}$  für freie Neutronen.

Für das Neutronen-Protonen-Verhältnis gilt also:

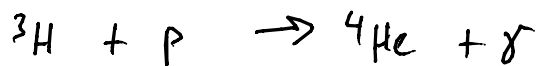
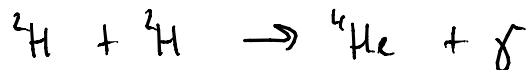
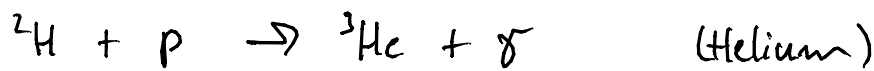
$$\frac{n(t)}{p(t)} = \frac{n_0/p_0 \cdot \exp(-t/\tau)}{1 + n_0/p_0 - n_0/p_0 \cdot \exp(-t/\tau)}$$

Würde ab diesem Zeitpunkt nichts mehr passieren, würden alle Neutronen zerfallen und unser Universum würde ausschließlich aus Protonen und Elektronen bestehen! ABER:

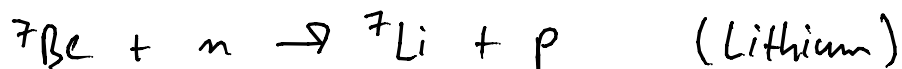
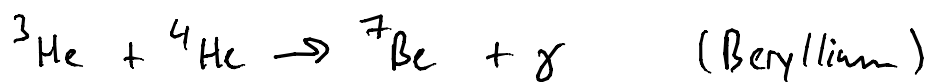
Protonen und Neutronen fusionieren zu leichteren Elementen [1]:



Die Produktion von Helium fängt an, sobald  $k_B T = 0.05 \text{ MeV}$ :  
(siehe Hinweis in der Aufgabenstellung)



(noch einige mehr Reaktionen sind möglich, siehe [1])



Für den Zeitpunkt  $t$  gilt [2]:

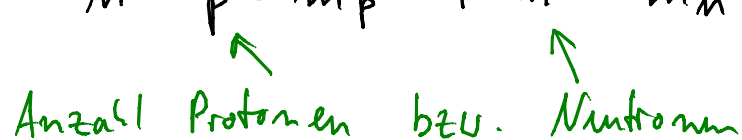
$$kT = 1.307 \text{ MeV} \cdot \sqrt[4]{2} / (t^{1/2} \cdot g_{\text{eff}}^{1/4}) = 0.05 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow t = 966.33 \text{ s} \cdot (g_{\text{eff}})^{-1/2}$$

Praktisch alle Neutronen werden in  ${}^4\text{He}$  eingebaut [1]!

Die Gesamtmasse im Universum ist gegeben durch die Summe der Masse der Protonen und Neutronen:

$$M = p \cdot m_p + n \cdot m_n \simeq (p+n) m_n$$



Anzahl Protonen bzw. Neutronen

Die Heliummasse ergibt sich zu:

$$M_{\text{He}} = n_{\text{He}} \cdot m_{\text{He}} = \frac{M}{2} (2m_p + 2m_n) \simeq 2n m_n$$

Damit ergibt sich der Helium-Massenanteil im Universum [1]:

$$Y = \frac{M_{\text{He}}}{M} = \frac{2n m_n}{(n+p)m_n} = \frac{2 \cdot n/p}{1 + n/p}$$

| $N_\gamma$          | 3      | 4      | 5      | 6      |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|
| $g_{\text{eff}}$    | 10.75  | 12.5   | 14.25  | 16     |
| $kT$ [MeV]          | 0.80   | 0.82   | 0.838  | 0.855  |
| $\frac{n_0}{p_0}$   | 0.200  | 0.208  | 0.215  | 0.222  |
| $t$ [s]             | 294.73 | 273.32 | 255.99 | 241.58 |
| $\frac{n(t)}{p(t)}$ | 0.136  | 0.146  | 0.154  | 0.161  |
| $Y$                 | 0.240  | 0.254  | 0.264  | 0.277  |

(mit  $\Delta m = m_n - m_p = 1.29 \text{ MeV}/c^2$ )

---

Quellen: [1] Astroteilchenphysik I, Vorlesung #3

[2] Perkins, Particle Astrophysics (S.129)