Übungen zur Astroteilchenphysik	**WS 13/14**
1. Übungsblatt	**06.11.2013**

1) Teilchenbeschleunigung am LHC und im Kosmos

Kosmische Beschleuniger wie aktive galaktische Kerne, sog. AGN's (active galactic nuclei), beschleunigen Teilchen auf Energien von bis zu 10^{20} eV = 100 EeV.
Der leistungsfähigste menschengemachte Beschleuniger, der Large Hadron Collider (LHC), erreicht Protonenergien von bis zu $7 \cdot 10^{12}$ eV = 7 TeV.

a) Leiten Sie die Formel für die Schwerpunktsenergie (center-of-mass) her für den Fall eines Kolliders und eines Fixed-Target Experiments. Benutzen Sie die relativistischen Energie- und Impulserhaltungssätze (in Form der Invarianz des quadratischen Viererimpulses).

b) Berechnen Sie die Schwerpunktsenergie zweier kollidierender Protonen am LHC.

c) Berechnen Sie die Schwerpunktsenergie der Kollision eines kosmischen Protons der Energie E = 10^{20} eV mit einem ruhenden Proton in der Erdatmosphäre.

d) Welche Energie benötigt ein kosmisches Proton um in der Reaktion aus c) eine Schwerpunktsenergie von 14 TeV zu erreichen?

<u>Lösung:</u>

a) In beiden Fällen benutzt man den Viererimpuls $\vec{P} = (E, p_x, p_y, p_z)$.
Sein Quadrat ist eine Erhaltungsgröße: $\vec{P}\vec{P} = E^2 - \vec{p}\vec{p} = m^2$.
Für das Quadrat der Schwerpunktsenergie gilt: $s = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2$.
<u>Kollider:</u> Die Viererimpulse der kollidierenden Teilchen sind identisch $\vec{P}_1 = \vec{P}_2 = (E, \vec{p})$, so dass für die Schwerpunktenergie gilt: $\sqrt{s} = 2E$.
<u>Fixed-Target:</u> Hier gilt für die Viererimpulse: $\vec{P}_1 = (E, \vec{p}_1), \vec{P}_2 = (m, 0)$. Für die Schwerpunktenergie folgt: $s = \vec{P}_1^2 + 2\vec{P}_1\vec{P}_2 + \vec{P}_2^2 = E_1^2 - p_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2$ bzw. $\sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2}$.
Ein Vorteil von Fixed-Target-Experimenten ist, dass man damit gezielt in eine Richtung beschleunigte instabile Teilchen herstellen kann (Boost).

b) Für zwei kollidierende Protonen mit einer jeweiligen Energie von 7 TeV folgt aus a) eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 2E = 14\, TeV$.

c) Aus a) folgt für die Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = \sqrt{2m_p^2 + 2E_p m_p} = 4{,}5 \cdot 10^{14}\, eV$.

d) Auflösen der Schwerpunktsenergie nach E_p liefert: $E_p = \frac{\sqrt{s}^2 - 2m_p^2}{2m_p} = 10^{17}\, eV$.

2) Der Pion-Zerfall:

a) Ein Pion zerfällt in Ruhe gemäß: $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$.
Berechnen Sie die jeweilige (kinetische und Gesamt-) Energie, die das Myon und das Neutrino davontragen.
($m_\pi c^2 = 139{,}5\ MeV, m_\mu c^2 = 105{,}8 MeV, m_\nu c^2 = 0$)

b) Pionen aus einem Pion-Strahl mit der Energie 10 GeV zerfallen im Flug. Berechnen Sie die minimale und maximale kinetische Energie der Myonen.
(Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe a) und die Lorentz-Transformation)

Lösung:

a) Für die Energie- und Impulserhaltung gilt: $E_\pi = E_\mu + E_\nu,\ p_\mu = p_\nu = E_\nu$.
Mit Hilfe der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = m^2 + p^2$ folgt:
$E_\mu^2 = m_\mu^2 + p_\mu^2 = (E_\pi - E_\nu)^2 = m_\pi^2 - 2m_\pi E_\nu + E_\nu^2$
$\to E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = 30\ MeV,\ E_\mu = E_\pi - E_\nu = 110\ MeV.$

b) Da Myon und Neutrino immer in entgegengesetzte Richtung emittiert werden, erhält das Myon die maximale (minimale) Energie, falls es in (entgegen der) Richtung des Pions emittiert wird.
Für die Lorentz-Transformation gilt: $E_\mu^{Lab} = \gamma(E_\mu + \beta p_{\mu,||})$.
Die Energie E_μ des Myons im Ruhesystem des Pions beträgt $110\ MeV$ (siehe a)).
Sein Impuls hängt von der Emissionsrichtung ab, und beträgt in den hier relevanten Extremalfällen $p_{\mu,||} = \pm 30\ MeV$ (siehe a)).
Der γ Faktor sorgt für einen „Boost" des CoM Bezugssystems in das Laborsystem: $\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi} = 73{,}5, \beta \approx 1$.
Damit ergibt sich $E_\mu^{Lab,max} = 73{,}5 \cdot (110 + 30)\ MeV = 10{,}28\ GeV,$
$E_\mu^{Lab,min} = 73{,}5 \cdot (110 - 30)\ MeV = 5{,}88\ GeV.$

3) Neutrino-Streuung in interstellarem Medium

Bei der Wechselwirkung von Elektron-Antineutrinos mit Elektronen des interstellaren Mediums können W⁻ Bosonen resonant erzeugt werden: $e^- + \bar{\nu}_e \to W^-$. Berechnen Sie die dafür benötigte Neutrino-Energie unter der Annahme, dass sich die Elektronen in Ruhe befinden.

Lösung:

In diesem Fall handelt es sich um eine Fixed-Target Kollision entsprechend Aufgabe 1), bei der für die Schwerpunktsenergie gilt: $\sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2}$. Diese muss groß genug sein, die Ruheenergie des W-Bosons zu erzeugen.
Sei $m_1 = m_\nu = 0,\ m_2 = m_e = 5{,}11 \cdot 10^{-4}\ GeV, m_W = 80{,}4\ GeV$.
Das Neutrino benötigt also mindestens eine Energie:
$E_1 = E_\nu = \frac{m_W^2 - m_e^2}{2m_e} = 6{,}3 \cdot 10^6\ GeV = 6{,}3\ PeV$.
Das IceCube Neutrino Teleskop hat die bisher höchstenergetischen Neutrinos „Ernie“ und „Bert“, mit einer Energie von jeweils etwa $1\ PeV$ entdeckt. Es wird vermutet, dass sie astrophysikalischen (extragalaktischen) Ursprungs sind, da die erwartete Anzahl atmosphärischer Untergrund-Ereignisse dieser Energie nur 0.082 ± 0.004 beträgt.
Durch den hier betrachteten Prozess, auch Glashow-Resonanz genannt, wird der Neutrinofluss von Neutrinos mit Energien von mehr als $6{,}3\ PeV$ unterdrückt.

4) Proton-Photon Streuung

a) Berechnen Sie die minimale Photon-Energie für die direkte Pion-Produktion gemäß $p + \gamma \to \pi^+ + X$ *für ein ruhendes Proton* ~~im Ruhesystem des Protons~~. Überlegen Sie sich anhand der Baryonzahl- und Ladungserhaltung, um welches Teilchen es sich bei X handeln könnte.

b) Nehmen Sie nun an, das Photon habe eine thermische Energie entsprechend einer Temperatur T = 3K. Welches ist die minimale Energie im Laborsystem, welche das Proton benötigt, um den Prozess aus a) zu ermöglichen (nehmen Sie an, bei X handle es sich um ein Neutron).

Lösung:

a) Im Falle von X handelt es sich um ein neutrales Teilchen der Baryonzahl 1. Das leichteste, und damit vom Phasenraum favorisierte, hierfür in Frage kommende Teilchen ist das Neutron.
Aus der Invarianz der Viererimpulse (siehe Aufgabe 1)) folgt für diese Reaktion: $(P_p + P_\gamma)^2 = (P_\pi + P_n)^2$.
Im Center-of-Momentum System gilt im Falle minimaler Schwerpunktsenergie für die Viererimpulse: $P_\gamma = \begin{pmatrix} E_\gamma \\ p_\gamma \end{pmatrix}, P_p = \begin{pmatrix} E_p \\ -p_\gamma \end{pmatrix}, P_\pi = \begin{pmatrix} E_\pi \\ 0 \end{pmatrix}, P_n = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$,
woraus folgt: $P_p^2 + 2P_pP_\gamma = (P_\pi + P_n)^2$,
und mit $P_p^2 = m_p^2,\ P_\gamma^2 = 0,\ P_\gamma = E_{\gamma,} E_\pi = m_\pi,\ E_n = m_n$:
$E_{\gamma,min} = \frac{(m_\pi + m_n)^2 - m_p^2}{2m_p} = 151{,}45\ MeV$.
Befindet sich das Proton in Ruhe, so müssen Pion und Neutron einen Nettoimpuls davon tragen, um die Impulserhaltung zu gewährleisten. Aus dem Energieerhaltungssatz: $E'_\gamma = E_\pi + E_n - E_p = 140{,}9\ MeV$ folgt, dass eine Energie von $140{,}9\ MeV$ aufgewendet werden muss, um die Massen der Endprodukte zu erzeugen. Die restliche Energie $E_{\gamma,min} - E'_\gamma = 10{,}6\ MeV$ steckt in den Impulsen der Endprodukte.
Zur Bestimmung der tatsächlichen Pion- und Neutronimpulse muss das CoM System ins Laborsystem geboostet werden, wobei der Boostfaktor durch $\beta = \frac{E_\gamma}{E_\gamma + m_p} = 0{,}139$ gegeben ist. Hier gibt es dann allerdings unendlich viele Lösungen.

b) Informationen: Die Photonen der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB) sind die häufigsten Teilchen im Universum ($411/cm^3$). Sie entstanden wenige Minuten nach dem Urknall bei der Annihilation von Materie und Antimaterie bei einer Temperatur von $> 10^{11}\ K$. Durch die Expansion des Universums haben sie sich bis heute auf eine Temperatur von etwa $3\ K$ abgekühlt.
Die mittlere thermische Energie der Photonen beträgt $E_\gamma = kT = 2{,}58 \cdot 10^{-4}\ eV$.

Analog zu a) gilt: $(P_p + P_\gamma)^2 = (P_\pi + P_n)^2$, wobei jetzt $P_p = \begin{pmatrix} E_p \\ -E_p \end{pmatrix}$, $P_\gamma = \begin{pmatrix} E_\gamma \\ E_\gamma \end{pmatrix}$ (Proton- und Photon-Impulse sind einander entgegen gerichtet, um den Energieübertrag zu maximieren).

$\rightarrow \; m_p^2 + 4E_pE_\gamma = (m_\pi + m_n)^2 \;\; \rightarrow \;\; E_p = \frac{(m_\pi+m_n)^2-m_p^2}{4E_\gamma} = 3 \cdot 10^{20}\ eV.$

Da die kosmische Strahlung hauptsächlich aus Protonen besteht und die CMB-Photonen in sehr großer Zahl vorkommen, bildet dies die Grenzenergie, bis zu der Teilchen der kosmischen Strahlung detektiert werden können. Es handelt sich um den sogenannten GZK-Cutoff (Greisen-Zatsepin-Kuzmi).