

1) Teilchendetektion über Cherenkov-Strahlung

Eine Methode, Teilchen zu identifizieren und energetisch zu vermessen, ist die Detektion der durch sie hervorgerufenen Cherenkov-Strahlung. Sie entsteht, wenn sich geladene Teilchen mit höherer Geschwindigkeit als der materialspezifischen Lichtgeschwindigkeit durch ein Medium bewegen.

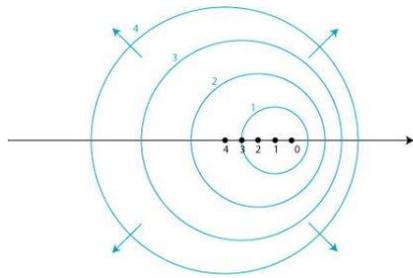
- Erklären Sie das physikalische Prinzip des Cherenkov-Effekts.
- Leiten Sie die Formel für den Öffnungswinkel θ des entstehenden Cherenkov-Kegels aus dem Huygens'schen Prinzip her.
- Welche Mindestenergie benötigt ein Elektron bzw. Myon, um Cherenkov-Strahlung in Luft (Brechungsindex $n = 1,0003$) und in Wasser ($n = 1,333$) zu erzeugen?
- Wasser-Cherenkov Detektoren bestehen typischerweise aus zylindrischen Wassertanks mit einem Fassungsvermögen von mehreren kt. Die entstandene Cherenkov-Strahlung wird von Photomultipliern detektiert, die an den Wänden des Tanks montiert sind. Sie bildet aufgrund der kegelförmigen Ausbreitung eine ringförmige Struktur aus. Wie unterscheidet der Experimentator anhand des Rings zwischen einem Elektron und einem Myon? Betrachten Sie hierzu qualitativ die Wechselwirkung der Teilchen mit dem Wasser.

Lösung:

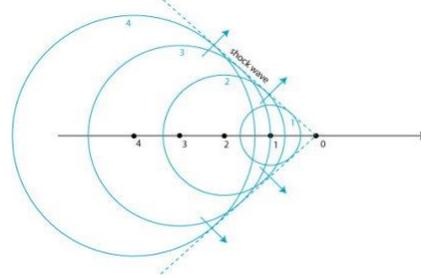
- Der Cherenkov-Effekt tritt nur in dielektrischen, d.h. polarisierbaren, Medien auf, wenn die Geschwindigkeit der geladenen Teilchen die Phasengeschwindigkeit v_p von Licht in diesem Medium überschreitet. Sie ist gegeben durch $v_p = c/n$, wobei n der Brechungsindex ist. Es gilt immer $v_p < c$!

Beim Durchflug des geladenen Teilchens bewirkt sein elektromagnetisches Feld eine Verschiebung der Elektronen des Mediums (Polarisation). Nach Passieren des Teilchens kehren die Elektronen unter Emission von Photonen wieder in den Grundzustand zurück.

Bewegt sich das Teilchen mit $v < c/n$ (Bild a)), so kann sich keine gemeinsame Wellenfront ausbilden und es kommt zur destruktiven Interferenz der von den Atomen emittierten Cherenkov-Strahlung. Für $v > c/n$ bildet das elektromagnetische Feld des Teilchens eine gemeinsame Schockfront unter einem bestimmten Winkel. Die Photonen, die auf dieser Schockfront emittiert werden interferieren konstruktiv, so dass der Cherenkov-Effekt verstärkt und damit messbar wird.

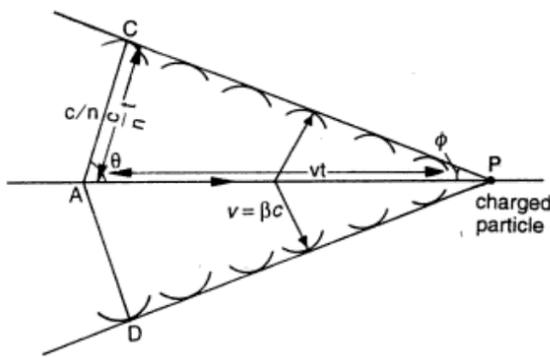


a) $v < c/n$



b) $v > c/n$

b)



Das geladene Teilchen bewegt sich mit $v_t = \beta c$. Die elektromagnetische Welle, die von dem sich bewegenden Teilchen ausgeht, breitet sich mit $v_w = c/n$ aus (siehe Bild). Falls $v_t > v_w$ bzw. $\beta n > 1$, so existiert ein Abstrahlwinkel θ , für den die Wellen konstruktiv interferieren. Er ist gegeben durch

$$\cos \theta = \frac{v_w t}{v_t t} = \frac{1}{\beta n}$$

c) Damit ein Teilchen Cherenkov-Strahlung erzeugen kann, muss gelten: $\beta n > 1$.

Für die benötigte Mindestenergie gilt dann: $E_{min} = \gamma m c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} m c^2$.

Luft ($n = 1,0003$): $\beta > 0,9997 \rightarrow \gamma = 40,828$

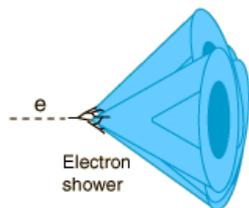
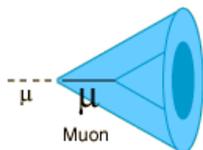
$$E_{min,\mu} = \gamma m_\mu c^2 = 4,32 \text{ GeV}, E_{min,e} = \gamma m_e c^2 = 20,9 \text{ MeV}$$

Wasser ($n = 1,333$): $\beta > 0,75 \rightarrow \gamma = 1,51$

$$E_{min,\mu} = \gamma m_\mu c^2 = 160 \text{ MeV}, E_{min,e} = \gamma m_e c^2 = 0,77 \text{ MeV}$$

Wasser eignet sich demnach besonders gut als Medium zur Detektion von Teilchen via Cherenkov-Strahlung.

d) Ein hochenergetisches Myon bewegt sich ungehindert durch das Wasser, wobei es langsam Energie verliert durch die Emission des Cherenkov-Lichts (oberes Bild). Es bildet sich ein wohl definierter kreisförmiger Ring aus an den Photomultipliern.



Im Falle von Elektronen kommt es zur Wechselwirkung des Primärelektrons mit dem Wasser. Dabei werden durch Ionisation Sekundärelektronen erzeugt, die jeweils einen eigenen Cherenkov-Kegel erzeugen. Durch deren Überlagerung bildet sich ein diffuser Ring, der von dem des Myons unterscheidbar ist.

2) Teilchen in kosmischen Magnetfeldern:

Geladene Teilchen der kosmischen Strahlung werden auf ihrem Weg vom Entstehungsort bis zum Auftreffen auf die Erdatmosphäre von schwachen kosmischen Magnetfeldern beeinflusst.

- a) Zeigen Sie, dass der Krümmungsradius ρ unter der Annahme $\vec{v} \perp \vec{B}$ und mit der Näherung $p \approx E/c$ gegeben ist durch

$$\rho[pc] = 1,1 \frac{E[PeV]}{|Z| \cdot B[\mu G]}$$

wobei Z die Ladung des Teilchens bezeichnet und es gilt:

$$1 eV \approx 1,6 \cdot 10^{-19} J, 1 pc = 3 \cdot 10^{16} m, e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C, 1 T = 10^4 G.$$

- b) Typische Galaxien haben einen Durchmesser von $30 kpc$ und eine Dicke von $0,3 kpc$. Berechnen Sie die maximale Energie, die ein Proton haben darf um in einer solchen Galaxie gefangen zu sein, unter der Annahme eines konstanten Magnetfelds der Stärke $3 \mu G = 3 \cdot 10^{-10} T$.
- c) Bestimmen Sie die Rigidität des Protons aus b). Was ist die physikalische Bedeutung dieser Größe und was lernt man aus ihrer Vermessung?
- d) Geladene Teilchen, die sich in einem Magnetfeld bewegen, verlieren kontinuierlich Energie aufgrund von Synchrotron-Strahlung. Der Energieverlust ist gegeben durch

$$-\frac{dE}{dt} = 3,79 \cdot 10^{-6} \cdot B^2[G] \cdot E^2[GeV] \frac{GeV}{s}$$

Nach welcher Zeit hat ein Elektron die Hälfte seiner Energie durch Synchrotron-Strahlung verloren?

Was kann man aus der Synchrotron-Strahlung über das Magnetfeld in einer Galaxie lernen?

Lösung:

- a) Gleichsetzen von Lorentzkraft und Zentripetalkraft liefert:

$$qvB = \frac{mv^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{p}{qB} = \frac{E/c}{ZeB}$$

$$\rightarrow \rho[m] = \frac{E[eV]}{3 \cdot 10^8 \cdot Z \cdot B[T]} m = \frac{10^{15} \cdot E[PeV]}{3 \cdot 10^8 \cdot Z \cdot 10^{-10} \cdot B[\mu G]} m = 3,3 \cdot 10^{16} m \cdot \frac{E[PeV]}{Z \cdot B[\mu G]}$$

$$\rightarrow \rho[pc] = 1,1 \cdot \frac{E[PeV]}{Z \cdot B[\mu G]}$$

- b) Aus a) folgt für die Energie der Protonen ($Z = 1$, unter der Annahme vernachlässigbarer Massen): $E = 0,91 \cdot \rho[pc] \cdot B[\mu G] PeV$.

Da das Magnetfeld entlang der galaktischen Ebene ausgerichtet ist, darf der Gyrationradius (=Krümmungsradius ρ) die halbe Dicke der Galaxie nicht überschreiten, d.h. $E_{max} = 0,91 \cdot 150 \cdot 3 \text{ PeV} = 4,1 \cdot 10^{17} \text{ eV}$.

Die Änderung des spektralen Index im Spektrum der kosmischen Strahlung an der Position des sogenannten Knies wird auf den Übergang von galaktischer zu extra-galaktischer kosmischer Strahlung zurückgeführt.

- c) Die magnetische Rigidität oder Steifigkeit ist definiert als $R = \rho B = 1,35 \cdot 10^9 \text{ Tm}$. Sie ist ein Maß für die Fähigkeit des Teilchens, in Magnetfeldern nicht die Richtung zu verlieren. Damit ist es möglich herauszufinden, ob die Einfallsrichtung des Teilchens korreliert sein kann mit der Richtung, in der sich die Quelle des Teilchens (z.B. eine Supernova oder ein AGN) befindet.

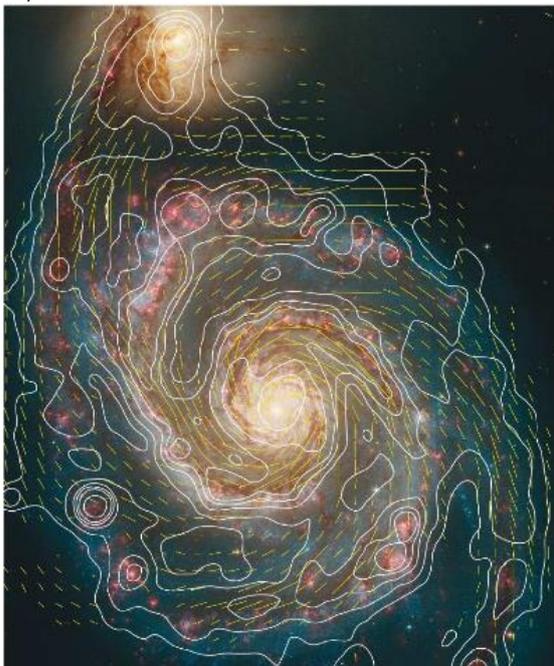
- d) Die angegebene Formel lässt sich umstellen und integrieren

$$-\frac{dE}{E^2} = 3,79 \cdot 10^{-6} \cdot B^2 dt \rightarrow \int_{E_0}^{E_0/2} -\frac{dE}{E^2} = 3,79 \cdot 10^{-6} \cdot B^2 \int_0^{t_{1/2}} dt$$

$$\rightarrow \frac{1}{E_0[\text{GeV}]} = 3,79 \cdot 10^{-6} \cdot B^2[\text{G}] \cdot t_{1/2}[\text{s}] \rightarrow t_{1/2} = \frac{2,64 \cdot 10^5}{B^2[\text{G}] \cdot E_0[\text{GeV}]} \text{ s}$$

Für das Proton aus b) mit $E_0 = 4,1 \cdot 10^{17} \text{ eV}$ und $B = 3 \cdot 10^{-6} \text{ G}$ folgt:

$$t_{1/2} = 7,15 \cdot 10^7 \text{ s} = 2,27 \text{ y.}$$



Die Beobachtung der Stärke der Synchrotron-Strahlung aus verschiedenen Bereichen einer Galaxie erlaubt einen Rückschluss auf die Stärke des Magnetfelds in diesen Regionen.

Zudem kann die Polarisation der Strahlung vermessen werden, welche Rückschlüsse auf die Struktur des Magnetfelds erlaubt. Eine Vorzugsrichtung der Polarisation deutet auf eine korrelierte Richtung des Magnetfelds hin (meist spiralförmig, siehe Bild). Die Ursache des galaktischen Magnetfelds ist noch ungeklärt. Die gängigsten Theorien sind:

i) ein primordiales Magnetfeld, welches durch die Rotation der Galaxie verwirbelt wurde;

belt wurde;

ii) ein Dynamo-Modell, bei dem ein Teil der kinetischen Energie von sich in der Galaxie befindlichen Teilchen in magnetische Energie konvertiert wird (Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen)

3) Schauerentwicklung:

In der elektromagnetischen Komponente eines Schauers dominieren die Prozesse der Bremsstrahlung und Paarbildung. In einem vereinfachten Modell kann man annehmen, dass ein Elektron mit Energie E_0 nach einer Strahlungslänge X_0 ein Photon der Energie $E_0/2$ abstrahlt. Nach einer weiteren Strecke X_0 konvertiert das Photon in ein Elektron und ein Positron mit jeweils einer Energie $E_0/4$ und das primäre Elektron strahlt ein weiteres Photon der Energie $E_0/4$ ab. Der Schauer entwickelt sich auf diese Art weiter bis zu einer kritischen Energie E_c , ab der keine neuen Teilchen erzeugt werden können. Die vorhandenen Teilchen sterben durch Reaktionen und Zerfälle aus.

- In Einheiten der Strahlungslänge, nach welcher Strecke X_{max} wird das Schauermaximum erreicht?
Wie groß ist die Anzahl N_{max} der Teilchen am Schauermaximum?
Veranschaulichen Sie sich hierzu die Entwicklung der Größen E, N und X graphisch.
- Für elektromagnetische Schauer in Luft beträgt E_c etwa 100 MeV . Wie ist diese Größe definiert?
Welche Schauerlängen ergeben sich damit für primäre Elektronen mit einer Energie von 10^{12} bzw. 10^{20} eV, wenn man davon ausgeht, dass das Schauermaximum etwa bei $2/3$ der Schauerlänge liegt?
- Die atmosphärische Tiefe x (in g/cm^2) hängt exponentiell von der Höhe h (in km) über dem Meeresspiegel ab: $x = X e^{-h/H}$, wobei $H = 6,5 \text{ km}$ und $X = 1030 \text{ g/cm}^2$ die totale atmosphärische Tiefe ist.
In welcher Höhe bilden die Elektronen aus b) ihr Schauermaximum aus, wenn die Strahlungslänge 37 g/cm^2 beträgt?

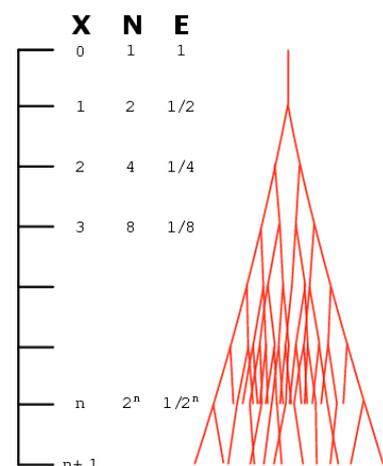
Lösung:

- Die Energie der Teilchen nach n Strahlungslängen ist gegeben durch $E(n) = E_0/2^n$.
Die im Aufgabentext beschriebene Kaskade setzt sich fort bis die Teilchen die kritische Energie E_c erreichen: $E(n) = E_c$. Somit folgt:

$$2^n = E_0/E_c \rightarrow n = \frac{\ln(E_0/E_c)}{\ln 2} \rightarrow X_{max} = n \cdot X_0$$

Die Anzahl der Teilchen am Schauermaximum ergibt sich somit zu

$$N_{max} = 2^n = E_0/E_c$$



- Die kritische Energie ist definiert als die Energie, bei der die Energieverluste durch Ionisation und durch Bremsstrahlung gleich groß sind, d.h.

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad}$$

Oberhalb dieser Energie werden hauptsächlich Bremsstrahlungsphotonen erzeugt, die ihrerseits wieder Elektron-Positron-Paare erzeugen, unterhalb kommt es lediglich zur Ionisation des Mediums, also zur Erzeugung eines einzelnen Elektrons, so dass der kaskaden-artige Prozess stoppt.

Für die Schauerlänge x gilt:

$$x = \frac{3}{2} X_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\ln(E_0/E_c)}{\ln 2} X_0$$

und damit: $x(10^{12} eV) = 19,93 \cdot X_0$, $x(10^{20} eV) = 59,8 \cdot X_0$.

c) Für die Schauerlängen aus b) gilt mit $X_0 = 37 \text{ g/cm}^2$:

$$x(10^{12} eV) = 737,47 \text{ g/cm}^2, \quad x(10^{20} eV) = 2216,6 \text{ g/cm}^2$$

Die Höhe h des Schauers berechnet sich nach der angegebenen Formel aus: $h = -H \ln\left(\frac{x}{X_0}\right)$, so dass insgesamt gilt:

$$h(10^{12} eV) = 2,17 \text{ km}, \quad h(10^{20} eV) = -4,97 \text{ km}$$