

1) Fluss und Zusammensetzung kosmischer Strahlung

Der Fluss $\varphi(E)$ ist eine Größe, die beschreibt, wie viele Teilchen dN in einem Energieintervall dE auf einer Fläche dA in einem Raumwinkelintervall $d\Omega$ und einem Zeitintervall dt auftreten:

$$\varphi(E) = \frac{dN}{dA d\Omega dt dE}$$

Der differentielle Fluss der kosmischen Strahlung folgt einem Potenzgesetz $\varphi(E) \propto E^{-\alpha}$, wobei α der spektrale Index ist, den wir grob mit $\alpha = 3$ annähern können.

- Zeigen Sie, dass das integrale Energiespektrum auch einem Potenzgesetz mit Index $(\alpha - 1)$ folgt.
- Um dem Pierre-Auger-Experiment Konkurrenz zu machen wollen wir einen Detektor bauen, der mindestens 10 Ereignisse pro Jahr über 10^{20} eV nachweisen soll. Wie groß ist die Fläche, die wir dafür pachten müssten, wenn wir annehmen, dass bei einer Energie von über 10^{15} eV noch ein Teilchen pro Jahr auf einem m^2 auftrifft (integraler Fluss)?
- Die Zusammensetzung der kosmischen Strahlung (Anteil Protonen, Elektronen, ...) ist bei hohen Energien immer noch ein Rätsel. Experimente zeigen, dass bei niedrigen Energien hauptsächlich Protonen vorkommen und dass bei steigender Energie mehr und mehr Helium- und schwerere Kerne auftreten. Bei welcher Energie ist der Anteil von Protonen und Heliumkernen in etwa gleich, wenn wir davon ausgehen, dass Protonen einen spektralen Index von $\alpha_H = 2,77$ und Heliumkerne $\alpha_{He} = 2,64$ besitzen? Weiterhin gilt, dass bei einer Energie von $E_c = 10^{12} \text{ eV}$ der Fluss $\varphi_H(E_c) = 11,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ TeV}^{-1}$ bzw. $\varphi_{He}(E_c) = 7,19 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ TeV}^{-1}$ ist.

Lösung:

- Für den Fluss gilt: $\varphi(E)dE \propto E^{-\alpha}dE$, so dass durch Integration folgt:

$$\varphi(E)dE \propto E^{-(\alpha-1)}$$

- Sei k die Proportionalitätskonstante in a), d.h. $\varphi(E)dE = kE^{-(\alpha-1)}$, wobei $\alpha = 3$. Für $E = 10^{15} \text{ eV}$ findet sich ein Fluss von 1 Ereignis pro Quadratmeter und Jahr. Aus $k \cdot (10^{15})^{-2} = 1/(\text{m}^2 \cdot \text{y})$ lässt sich die Konstante ermitteln zu

$$k = 10^{30}/(\text{m}^2 \cdot \text{y})$$

Da $\Omega = \text{const.}$ unabhängig ist von der Energie, folgt mit $N = 10 \text{ Ereignisse/y}$ bei einer Energie von 10^{20} eV eine benötigte Fläche von

$$A = \frac{N}{(10^{20})^{-2} \cdot k} = 10^{11} \text{ m}^2$$

c) Zuerst lassen sich aus den gegebenen Zahlenwerten

$$\alpha_H = 2,77, \quad \varphi_H(10^{12} \text{ eV}) = 11,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ TeV}^{-1}$$

$$\alpha_{He} = 2,64, \quad \varphi_{He}(10^{12} \text{ eV}) = 7,19 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ TeV}^{-1}$$

die Konstanten k_H und k_{He} bestimmen:

$$k_H = \frac{11,5}{(10^{12})^{-1,77}}, \quad k_{He} = \frac{7,19}{(10^{12})^{-1,64}}$$

Gleichsetzen der Flüsse

$$k_H E^{-1,77} = k_{He} E^{-1,64}$$

liefert für die gesuchte Energie $E = 37 \text{ TeV}$.

2. Die myonische Komponente der kosmischen Strahlung:

- Neben Hadronen und elektromagnetischen Anteilen enthalten hadronische Schauer auch Myonen. Woher stammen diese?
- Welche Mindestenergie benötigen Myonen, die in einer Höhe von 20 km erzeugt wurden, um auf der Erdoberfläche nachgewiesen werden zu können? Die Myon-Lebensdauer beträgt $2,2 \mu\text{s}$.
- Der mittlere Energieverlust ultra-relativistischer Myonen der Energie E beim Durchlaufen von $x \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$ Materie ist durch die Formel $-\frac{dE}{dx} = a + b \cdot E$ gegeben. Dabei ist $a = 2,5 \frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}}$ der Energieverlust durch Ionisation und durch den zweiten Term werden die Strahlungsverluste berücksichtigt. Berechnen Sie die mittlere Reichweite eines 10 TeV Myons in Gestein der Dichte $3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. (Die Kritische Energie E_c liegt in diesem Fall bei 1 TeV. Unterhalb dieser Energie verlieren die Myonen ihre Energie dominant durch Ionisationsprozesse, oberhalb durch Strahlungsprozesse).
- Der Myonen-Fluss auf Meereshöhe beträgt etwa $1 \text{ cm}^{-2} \text{ min}^{-1}$. Schätzen Sie die durch Myonen verursachte jährliche Dosis (in gray oder rad, wobei $1 \text{ gray} = 100 \text{ rad} = 6,2 \cdot 10^{12} \text{ MeV/kg}$) ab, der ein menschlicher Körper ($h = 1,75 \text{ m}, m = 70 \text{ kg}$) ausgesetzt ist.

Lösung:

- Wenn die Hadronen (hauptsächlich Protonen) auf die Atome/Moleküle der Atmosphäre treffen entstehen in großer Zahl Pionen, die ihrerseits wieder zerfallen, und zwar hauptsächlich in Myonen: $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$
- Hier ist der relativistische Zeitdilatationseffekt zu berücksichtigen. Der relativistische Faktor der Myonen ergibt sich auch $\gamma = \frac{E_\mu}{m_\mu}$. Man nehme an, dass sich die Myonen mit nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegen, d.h. $v = c$, so dass für die zurückgelegte Strecke h gilt: $h = \gamma ct = 20 \text{ km}$, $t = 2,2 \mu\text{s}$ und nach Auflösen folgt für die benötigte Myonenergie: $E = \frac{hm_\mu}{ct} = 3,2 \text{ GeV}$.
- Der Energieverlust setzt sich aus zwei Termen zusammen:

$$\frac{dE}{dx} = a + bE = \frac{dE_{\text{ion}}}{dx} + \frac{dE_{\text{rad}}}{dx}$$

Die kritische Energie E_c ist erreicht, wenn

$$\frac{dE_{\text{ion}}}{dx} = \frac{dE_{\text{rad}}}{dx} \rightarrow a = bE_c \rightarrow E_c = \frac{a}{b} = 1 \text{ TeV} \rightarrow b = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{g}$$

Die Reichweite des Myons ergibt sich aus

$$d = \int_{E_d}^{E_0} \frac{dE_\mu}{dE_\mu/dx} = \int_{E_d}^{E_0} \frac{dE_\mu}{a + bE_\mu}$$

Umformen und integrieren liefert

$$b \cdot d = \int_{E_d}^{E_0} \frac{dE_\mu}{\frac{a}{b} + E_\mu} = \int_{E_d}^{E_0} \frac{dE_\mu}{E_c + E_\mu} = \ln(E_c + E_\mu) \Big|_{E_d}^{E_0} = \ln\left(\frac{E_c + E_0}{E_c + E_d}\right)$$

Die maximale Reichweite wird erreicht für $E_d(d) = 0$, d.h.

$$d = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{E_c + E_0}{E_c}\right) = 9,6 \cdot 10^5 \frac{g}{cm^2} \rightarrow x = \frac{d}{\rho} = 3,2 \text{ km}$$

- d) Die Dosis lässt sich bestimmen aus dem Myonfluss φ , der Bestrahlzeit t und dem Energieverlust durch Ionisation a :

$$D = \varphi \cdot t \cdot a = 1,3 \cdot 10^9 \frac{MeV}{kg} = 0,2 \text{ mgray}$$

In einem durchschnittlichen Menschen wird also pro Jahr eine Energie von $D \cdot 70 \text{ kg} = 9,1 \cdot 10^{10} \text{ MeV}$ deponiert.

3. Die Energiedichte der kosmischen Strahlung:

Die Energiedichte der kosmischen Strahlung in unserer Galaxie wird zu etwa 1 eV/cm^3 gemessen. Die primäre kosmische Strahlung ist überwiegend galaktischen Ursprungs, d.h. man benötigt dauerhafte galaktische Quellen, um die gemessene Energiedichte aufrecht zu erhalten. Eine Möglichkeit bieten Pulsare, also rotierende Neutronensterne, die Überreste eines Sternes sind, der einen gravitativen Kollaps erlitten hat (Supernova).

- Während des Kollaps bleibt der Drehimpuls des Sterns erhalten. Welche Rotationsperiode T_p hat ein Pulsar mit Radius $R_p = 20 \text{ km}$, der aus einem Stern mit Radius $R_s = 10^6 \text{ km}$ und Rotationsperiode $T_s = 30 \text{ d}$ entstanden ist? (Vernachlässigen Sie hierzu den Massenverlust während des Kollaps.)
- Das ursprüngliche Magnetfeld B_s durch die obere Hemisphäre des Sterns mit Oberfläche A_s wird durch den Kollaps aufgrund der Erhaltung des magnetischen Flusses $\Phi = \int B dA$ extrem verstärkt. Wie groß ist das Magnetfeld B_p des Pulsars, wenn $B_s = 0,1 \text{ T}$?
- Die Rotationsachse des Pulsars stimmt meist nicht mit der Richtung des Magnetfelds überein. Durch die hohe Rotationsgeschwindigkeit v_p des Pulsars werden somit hohe elektrische Felder $\vec{E} = \vec{v}_p \times \vec{B}$ erzeugt. Welche Feldstärken werden durch den oben betrachteten Pulsar erzeugt, falls $\vec{v}_p \perp \vec{B}$?
- Es ist noch weitgehend unbekannt, wie ein Pulsar seine Rotationsenergie umsetzt in die Beschleunigung von Teilchen. Berechnen Sie die Rotationsenergie des obigen Pulsars, der eine Masse $m = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ besitzt. Man nehme an, dass der Pulsar über einen Zeitraum von 10^{10} Jahren insgesamt 1% dieser Energie umsetzt in die Beschleunigung kosmischer Strahlung. Die Supernova-Explosionsrate (=Pulsar-Erzeugungsrate) in unserer Galaxie beträgt etwa 1/Jahrhundert. Wie groß ist die freigesetzte Gesamtenergie aller Pulsare über das gesamte Alter unserer Galaxie von 10^{10} Jahren? Wie groß ist die Energiedichte der so beschleunigten kosmischen Strahlung in unserer Galaxie? (Durchmesser 30 kpc , Dicke $0,3 \text{ kpc}$)
- Welche vereinfachenden Annahmen wurden in d) gemacht, und welchen Einfluss haben sie auf das Ergebnis?

Lösung:

- Aus der Drehimpulserhaltung $\theta_s \omega_s = \theta_p \omega_p$ folgt mit $\theta = IR^2$:

$$\omega_p = \frac{R_s^2}{R_p^2} \omega_s \rightarrow T_p = \frac{R_s^2}{R_p^2} T_s \approx 1 \text{ ms}$$

- Es gilt die Erhaltung des magnetischen Flusses $\int B_s dA_s = \int B_p dA_p$ und somit:

$$B_p = B_s \frac{R_s^2}{R_p^2} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ T}$$

- c) Die Rotationsgeschwindigkeit berechnet sich zu

$$v_p = \frac{2\pi R_p}{T_p} = 1,26 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

woraus sich eine elektrische Feldstärke ergibt von

$$E = v \cdot B = 3,14 \cdot 10^{16} \text{ V/m}$$

- d) Der Trägheitstensor einer Kugel berechnet sich aus $\theta_K = \frac{2}{5} m R^2$, so dass für die Rotationsenergie gilt:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \theta_p \omega_p^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m R_p^2 \omega_p^2 = 6,3 \cdot 10^{45} \text{ J} = 3,95 \cdot 10^{64} \text{ eV}$$

Während seines Lebensdauer von 10^{10} y und einer Effizienz von 1% setzt ein einzelner Pulsar also eine Energie $\frac{dE}{dt} = 1,25 \cdot 10^{45} \frac{\text{eV}}{\text{s}}$ frei.

Bei einer Rate von einer Supernova (und damit einem Pulsar) pro Jahrhundert entstanden also 10^8 Pulsare in unserer Galaxie mit einer durchschnittlichen Injektionszeit von $5 \cdot 10^9 \text{ y}$ pro Pulsar. Daraus ergibt sich die freigesetzte Gesamtenergie zu $E_{tot} = 10^8 \cdot 5 \cdot 10^9 \text{ y} \cdot \frac{dE}{dt} = 2 \cdot 10^{70} \text{ eV}$.

Die Energiedichte berechnet sich damit zu

$$\rho = E_{tot}/V = 2 \cdot 10^{70} \text{ eV} / (0,15 \text{ kpc} \cdot \pi \cdot (15 \text{ kpc})^2) = 6,4 \text{ keV/cm}^3$$

- e) Der gemessene Wert der Energiedichte beträgt etwa $1,1 \text{ eV/cm}^3$, ist also viel kleiner als der in d) berechnete. Mögliche Ursachen für die Abweichung sind eine als zu schnell angenommene Rotationsperiode des Pulsars (realistische Werte im Bereich von 30 ms) und die als unendlich angenommene Lebensdauer der kosmischen Strahlung in unserer Galaxie (diese kann entweder der Galaxie entkommen oder durch Energieverlustprozesse verloren gehen).

4. Teilchenbeschleunigung in astrophysikalischen Schockfronten:

Die Detektion von Kernen mit Energien zwischen 10^6 eV und 10^{21} eV in unserem Sonnensystem impliziert ihre Existenz in großen Teilen des beobachtbaren Universums. Diese Beobachtung stimulierte die Entwicklung des Modells der diffusen Schockbeschleunigung. In diesem Modell werden Teilchen der kosmischen Strahlung beschleunigt durch mehrfaches Durchfliegen einer Schockfront, welche durch

überschallschnelle Teilchenflüsse astrophysikalischer Quellen, wie z.B. Supernova-überreste, erzeugt werden.

- Der Energiegewinn pro Durchflug betrage $\delta E = \varepsilon E$, wobei E die Teilchenenergie ist. Welche Energie hat ein Teilchen mit Anfangsenergie E_0 nach n Beschleunigungszyklen?
- Das Teilchen hat eine Wahrscheinlichkeit P_e bei der Beschleunigung „verloren“ zu gehen (z.B. in der Schockfront gefangen zu werden). Wie viele der anfänglichen N_0 Teilchen sind nach n Zyklen noch übrig?
- Schreiben Sie, ausgehend von einem Teilchen der Anfangsenergie E_0 , die Anzahl n an benötigten Zyklen für eine Beschleunigung auf die Energie E_n in Form eines Potenzgesetzes.
- Ein Teilchen habe eine Anfangsenergie $E_0 = 1 \text{ MeV}$. Wie oft muss es die Schockfront durchkreuzen um auf eine Energie von 1 TeV beschleunigt zu werden?

Lösung:

- Ein Teilchen gewinnt zwischen Durchflug $i - 1$ und Durchflug i die Energie $\Delta E = E_i - E_{i-1} = \varepsilon E_{i-1}$. Auflösen liefert $E_i = E_{i-1}(1 + \varepsilon)$, woraus sich die Teilchenenergie E_n nach n Durchläufen ergibt zu: $E_n = E_0(1 + \varepsilon)^n$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen in der Schockfront verbleibt (und damit weiter beschleunigt werden kann) ist $P = 1 - P_e$. Nach n Zyklen sind also noch $N = N_0(1 - P_e)^n$ Teilchen in der Schockfront.
- Auflösen der Gleichung aus a) nach n liefert: $n = \frac{\ln(E_n/E_0)}{\ln(1+\varepsilon)}$.
Auflösen der Gleichung aus b) liefert: $\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = n \cdot \ln(1 - P_e) = \frac{\ln(E_n/E_0)}{\ln(1+\varepsilon)} \cdot \ln(1 - P_e)$
Mit der Umdefinition $\gamma = \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln(1-P_e)}$ und der Relation $\ln a^n = n \ln a$ folgt das gesuchte Potenzgesetz:

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = \ln\left(\left[\frac{E_0}{E_n}\right]^{-\gamma}\right) \rightarrow \frac{N}{N_0} = \left(\frac{E_0}{E_n}\right)^{-\gamma}$$

(Die Aufgabe war hier schlecht formuliert: statt n war eigentlich N gesucht...)

- d) Die Anzahl an benötigten Beschleunigungszyklen ergibt sich aus $n = \frac{\ln(E_n/E_0)}{\ln(1+\varepsilon)}$.

Die Tabelle zeigt n in Abhängigkeit vom relativen Energiegewinn ε pro Durchlauf:

ε	n
0,1	145
1	20
10	6
100	3
1000	2