Übungen zur Astroteilchenphysik **WS 13/14**

4. Übungsblatt **18.12.2013**

1) <u>Der Compton-Effekt:</u>

a) In welchen leptonischen und hadronischen Wechselwirkungen werden die für die Gamma-Astronomie relevanten hochenergetischen Photonen erzeugt?
Von welcher Größenordnung sind die typischen Photonenergien?

b) Leiten Sie die Formel für die Wellenlängenänderung $\Delta\lambda$ beim Compton-Effekt her

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$$

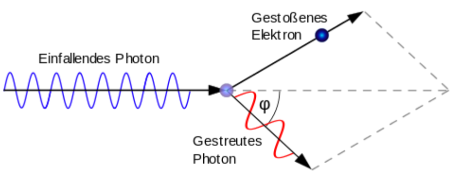
c) Für welchen Streuwinkel θ ist die Wellenlängenänderung maximal?

d) Im Falle des inversen Compton-Effekts gewinnt das Photon Energie durch Streuung mit einem relativistischen ($\gamma^2 - 1 \gg \hbar\omega/mc^2$) Elektron. Zeigen Sie, dass, falls im Ruhesystem des Elektrons gilt $\hbar\omega \ll mc^2$, die Photonenergie vor der Streuung (Laborsystem) zur Photonenergie im Ruhesystem des Elektrons zur Photonenergie nach der Streuung (Laborsystem) gegeben ist durch $1{:}\gamma{:}\gamma^2$. Welche Energie kann ein Photon maximal gewinnen bei der Streuung an einem Elektron der Energie $\gamma m_e c^2$?

<u>Lösung:</u>

a) Die relevante Prozesse sind
   i. Pionzerfall: MeV-GeV
   ii. Synchrotronstrahlung: MeV-GeV
   iii. Bremsstrahlung: MeV-GeV, fällt mit 1/E
   iv. Inverser Compton-Effekt: niederenergetisches Photon (meV) durch Streuung mit hochenergetischem Elektron aus SNR/Pulsar auf keV-TeV beschleunigt

b) Die Abbildung veranschaulicht den Compton-Effekt. Es gelten der (relativistische)



Energiesatz: $h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}$
und Impulssatz: $\frac{h}{\lambda} = p_e + \frac{h}{\lambda'}$
Anwenden des Cosinussatzes auf den Impulssatz liefert:

$$p_e^2 c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta$$

Quadrieren des Energiesatzes liefert:

$$p_e^2 c^2 = h^2(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu') + 2h(\nu - \nu')m_0 c^2$$

Gleichsetzen liefert nach Vereinfachung:

$$\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta) \;\rightarrow\; \lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$$

c) Die Wellenlängenänderung wird maximal, wenn der Faktor $[1 - \cos\varphi]$ maximal ist, d.h. für $\cos\varphi = -1 \;\rightarrow\; \varphi = 180°$ (Rückwärtsstreuung). Es folgt dann $\Delta\lambda = 2\lambda_c$.

d) Man kann den Energieübertrag der inversen Compton-Streuung als Konsequenz zweier aufeinander folgender Lorentz-Transformationen verstehen.

i. Zuerst setzt man sich in das Ruhesystem des Elektrons: Fast alle Photonen treffen frontal (head-on) auf das Elektron auf. Es ergibt sich (noch vor der Streuung) eine Doppler-Blauverschiebung des Photons um $\nu_0' = \nu_0[\gamma(1+\beta\cos\theta)] \approx \nu_0[\gamma(1+\beta)]$.

ii. Im Falle $\hbar\omega \ll mc^2$ lässt sich die Compton-Streuung als normale Thomson-Streuung auffassen, d.h. die Wellenlänge des Photons bleibt unverändert: $\nu' = \nu_0'$.

iii. Rücktransformation ins Laborsystem: Die Photonen werden hauptsächlich in die Bewegungsrichtung des Elektrons gestreut, wodurch eine weitere Doppler-Verschiebung zustande kommt: $\nu = \nu'[\gamma(1+\beta\cos\theta)] \approx \nu'[\gamma(1+\beta)] = \nu_0[\gamma(1+\beta)]^2$

Im ultrarelativistischen Limit ($\beta \to 1$) gilt für den maximalen Energieübertrag

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 4\gamma^2$$

2) Neutrinostreuung in der Erde:

a) Berechnen Sie die Neutrinoenergie $E_{\nu,\min}$, bei der die Erde für Neutrinos undurchsichtig (opaque) wird ($d_{Erde} = 12800\,\mathrm{km}$, $\bar{\rho} = 5{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$). Nehmen Sie eine homogene Massenverteilung für die Erde an. Die relevante Neutrinowechselwirkung bei diesen Energien ist die tiefinelastische Streuung an einem isoskalaren Target (Anzahl der Neutronen etwa gleich Anzahl der Protonen) mit einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma(\nu N) = 0{,}682 \cdot 10^{-38}\,\mathrm{cm}^2 \cdot E_\nu/\mathrm{GeV}$. Die Erde wird undurchsichtig wenn die freie Weglänge der Neutrinos dem Durchmesser der Erde entspricht.

b) Wie ändert sich die Grenzenergie, wenn der Erddurchmesser nur halb so groß wäre bei gleich bleibender Masse?

c) Wie unterscheidet der IceCube Detektor zwischen atmosphärischen und extraterrestrischen Neutrinos? Welchen Einfluss hat der obige Effekt der Neutrinostreuung auf die Messungen des IceCube Detektors?

Lösung:

a) Die freie Weglänge λ ist gegeben durch $\lambda = \dfrac{1}{n \cdot \sigma}$, wobei n die Teilchenzahldichte der Streuzentren und σ der Wirkungsquerschnitt für die Streuung ist. Opazität liegt vor, wenn $\lambda \leq d_{Erde}$ wird. Die (gemittelte) Teilchenzahldichte der Erde ergibt sich zu

$$n = \rho \cdot \frac{N_A}{m} = 5{,}5\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ 1/\mathrm{mol}}{1\ \mathrm{g}/\mathrm{mol}} = 3{,}3 \cdot 10^{24}\frac{1}{\mathrm{cm}^3}.$$

Setzt man in der Gleichung für die freie Weglänge für λ den Erddurchmesser ein und erweitert um die Neutrinoenergie E_ν, so kann man die Grenzenergie, ab der die Erde undurchsichtig wird, direkt in Einheiten von GeV ablesen:

$$E_\nu \cdot d_{Erde} = \frac{1}{n \cdot \sigma \cdot \frac{1}{E_\nu}} \Rightarrow \quad E_\nu = \frac{1}{d_{Erde} \cdot n \cdot \sigma \cdot \frac{1}{E_\nu}}$$

$$E_\nu = \frac{1\,\mathrm{GeV}}{1{,}28 \cdot 10^9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{24}\,\mathrm{cm}^{-3} \cdot 6{,}8 \cdot 10^{-39}\,\mathrm{cm}^2} = 3{,}48 \cdot 10^4\,\mathrm{GeV}$$

Die Erde wird also für Neutrinos ab einer Energie von ca. 35 TeV undurchsichtig.

b) Bei halbem Erddurchmesser würden sich die Dichte der Erde und damit auch die Teilchenzahldichte verachtfachen. Damit wäre die Grenzenergie für die Opazität nur noch ein viertel der unter a) berechneten, also $E'_\nu = 8{,}7\,\mathrm{TeV}$.

c) Extraterrestrische Neutrinos lassen sich zum einen dann als solche identifizieren, wenn sie in größerer Zahl aus einer bestimmten Richtung kommen, die mit einer möglichen Quelle für UHE Teilchen korreliert.
Im Falle diffuser hochenergetischer extraterrestrischer Neutrinos (z.B. falls nicht korreliert mit Quellen oder falls Zahl der Quellen sehr groß bei kleinen Flüssen pro Quelle) muss man auf das Energiespektrum als Diskriminator zurückgreifen. Während atmosphärische Neutrinos einem E^{-3} Potenzgesetz folgen, ist das Spektrum der extraterrestrischen Neutrinos mit E^{-2} wesentlich härter. Die Unterscheidung erfolgt hier demnach nicht auf Einzelteilchenbasis sondern lediglich durch die gesammelte Statistik.

3) Mindestenergie für Neutrinostreuung:

a) Berechnen Sie die Mindestenergie (energy threshold) für die folgende Streuung an einem ruhenden Elektron ($m_\nu = 0$):

$$\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$$

b) Nun betrachten wir die tiefinelastische Streuung mit einer geladenen Strom Reaktion (charged-current reaction) zwischen einem Tauneutrino und einem Nukleon ($m_p \approx m_n \approx 939\,MeV$) in einem Atomkern:

$$\nu_\tau + N \to \tau + X$$

Berechnen Sie auch hier die Mindestenergie für die Reaktion ($m_\nu = 0$).

Lösung:

a) Wir nehmen an, dass das Elektron beim Stoß in Ruhe sei. Die Schwerpunktsenergie ergibt sich dann zu : $S = \left(\sum E, \sum \vec{p}\right)^2 = \left(E_{\nu_\mu} + m_e, \vec{p}_{\nu_\mu}\right)^2$

Mit $c = 1$ und $p_{\nu_\varpi} = \dfrac{E_{\nu_\mu}}{c}$ erhält man

$$S = E_{\nu_\mu}^2 + 2E_{\nu_\mu} \cdot m_e + m_e^2 - E_{\nu_\mu}^2 = 2E_{\nu_\mu} \cdot m_e + m_e^2 \overset{!}{\geq} \left(m_{\nu_e} + m_\mu\right)^2$$

und daraus folgt, da die Masse des Neutrinos vernachlässigt wird, für die Mindestenergie $E_{\nu_\mu} \geq \dfrac{m_\mu^2 - m_e^2}{2m_e} \geq 10{,}9\ \mathrm{GeV}$.

b) Wir wählen eine mögliche Reaktion aus: $\bar{\nu}_\tau + p \to \tau^+ + n$
Die Schwerpunktsenergie lässt sich dann entsprechend dem Vorgehen in Aufgabenteil a) wie folgt schreiben: $S = 2E_{\nu_\tau} \cdot m_p + m_p^2$.
Mit $m_p = m_n = m_N = 939\,\mathrm{MeV}$ und der Bedingung für die Schwellenergie $S \overset{!}{\geq} \left(m_\tau + m_n\right)^2$ ergibt sich:

$$2E_{\nu_\tau} \cdot m_p + m_p^2 \geq m_\tau^2 + 2m_\tau \cdot m_n + m_n^2$$

$$E_{\nu_\tau} \geq \frac{1}{2}\frac{m_\tau^2 + 2m_\tau \cdot m_n + m_n^2 - m_p^2}{m_p} = \frac{1}{2}\frac{m_\tau^2}{m_p} + m_\tau$$

Mit $m_\tau = 1{,}777\ \mathrm{GeV}$ ergibt sich für die Mindestenergie dieser Reaktion ein Wert von $E_{\nu_\tau} \geq 3{,}4\ \mathrm{GeV}$.

4) Neutrinoastronomie zur Identifikation von Punktquellen:

Es wird angenommen, dass hochenergetische Neutrinos ($E_\nu > 100\,TeV$) unbeeinflusst von ihrem Entstehungsort zu unseren Detektoren gelangen können und somit direkt auf ihre Quelle zurück zeigen. Um diese effizient detektieren zu können, müssen große Volumina an Eis oder Wasser mit Photomultipliern instrumentiert werden.

a) Welche Kantenlänge muss der zu instrumentierende Würfel haben, wenn eine Detektionsrate von 250 Ereignissen pro Jahr erreicht werden soll? Die Wechselwirkungsrate der Neutrinos ist gegeben durch

$$R = \Phi_\nu \cdot W \cdot A_{eff}$$

wobei $\Phi_\nu = \Phi_\nu(E_\nu > 100\,TeV)$ der integrale Fluss ist, der sich aus

$$\frac{dN}{dE_\nu} = 2 \cdot 10^{-11} \frac{100}{E_\nu^2[TeV^2]} cm^{-2}s^{-1}TeV^{-1}$$

ergibt und W ist die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit, gegeben durch

$$W = N_A \cdot \sigma \cdot d \cdot \rho$$

mit N_A: Avogadro-Zahl, $\sigma(\nu_\mu N) = 6{,}7 \cdot 10^{-34}\,cm^2/Nukleon$, $\rho = 1\,g/cm^3$ und d: Kantenlänge des Detektionsvolumens.

b) Ein hochenergetisches Neutrino erzeuge in einer CC-Reaktion ein Myon der Energie $E_\mu = 1\,TeV$. Der Energieverlust des Myons berechnet sich analog zu Blatt 3, A2 durch $-\frac{dE}{dX} = A + B \cdot E$, wobei $A = 2\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{cm}}$ und $B = 4{,}2 \cdot 10^{-6}\frac{1}{\mathrm{cm}}$ (In diesem Fall sind die Größen bereits durch die Dichte des Eises korrigiert). Bestimmen Sie die für den Detektor relevante Myon-Reichweite, wobei sich die untere Schwellenenergie aus der Cherenkov-Bedingung von Blatt 2, A1 ergibt.

Lösung:

a) Für die Wechselwirkungsrate gilt

$$R = \Phi_\nu \cdot W \cdot A_{eff} = \Phi_\nu \cdot N_A \cdot \sigma \cdot d \cdot \rho \cdot d^2 = 250\,y^{-1} = 7{,}93 \cdot 10^{-6}\,s^{-1}$$

Der integrale Neutrinofluss $\Phi_\nu(E_\nu > 100\,TeV)$ ergibt sich durch Integration der gegebenen Gleichung zu $\Phi_\nu(E_\nu > 100\,TeV) = 2 \cdot 10^{-11}\,cm^{-2}s^{-1}$.

Auflösen nach der Kantenlänge des Würfels liefert: $d = \sqrt[3]{\frac{R}{\Phi_\nu \cdot N_A \cdot \sigma \cdot \rho}} = 1km$.

b) Die Reichweite des Myons ergibt sich aus Integration der gegebenen Gleichung $X = \frac{1}{B}\frac{\ln\left(\frac{A}{B}+E_0\right)}{\ln\left(\frac{A}{B}+E_{th}\right)}$, wobei $E_0 = 1\,TeV = 10^6\,MeV$, $E_{th} = 160\,MeV$. Damit folgt $X = 2{,}6\,km$.