Übungen zur Astroteilchenphysik	**WS 13/14**
5. Übungsblatt	**15.01.2014**

1) Targetmasse für neutrinolosen doppelten β-Zerfall:

Ein vielversprechender Kandidat für die Suche nach dem neutrinolosen doppelten β-Zerfall ist ^{76}Ge. Die experimentelle Observable ist die Halbwertszeit $T_{1/2}$. Die von aktuellen Experimenten anvisierte Sensitivität liegt bei $T_{1/2} = 5 \cdot 10^{25}\ y$.

a) Welche Menge an ^{76}Ge wird benötigt, um in diesem Falle eine Ereignisrate von 3 Ereignissen pro Jahr zu messen? Nehmen Sie hierzu an, das Experiment wäre untergrundfrei.

b) Welche Menge an natürlich vorkommendem Germanium müsste Ihr Labor kaufen, um das Ziel aus a) zu realisieren?

Lösung:

a) Die Aktivität $A = \lambda \cdot N_{Ge} = 3/y$ ergibt sich aus der Zerfallskonstanten von Germanium $\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}$ und der Anzahl an Germaniumatomen N_{Ge}. Damit gilt:

$$N_{Ge} = \frac{3\tau}{y} = \frac{3}{\ln(2)}\frac{T_{1/2}}{y} = 2{,}16 \cdot 10^{26}$$

und somit für die Germaniummenge

$$m_{Ge} = 76\ amu \cdot N_{Ge} = 76 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} kg \cdot 2{,}16 \cdot 10^{26} = 27{,}3\ kg$$

b) Der Anteil von ^{76}Ge in natürlich vorkommendem Germanium beträgt 7%. Daraus ergibt sich eine benötigte Gesamtmenge von $390\ kg$ Germanium.

2) Untergrund bei der Suche nach seltenen Ereignissen:

a) α-Teilchen der Energie $4\ MeV$ haben in Luft eine Reichweite von $2{,}5\ cm$. Berechnen Sie die Reichweite der α-Teilchen in Blei und in Wasser. Nehmen Sie dazu an, dass die Reichweite umgekehrt proportional ist zur Dichte des absorbierenden Materials ($\rho_{Luft} = 1{,}29 \frac{mg}{cm^3}$, $\rho_{Wasser} = 1 \frac{g}{cm^3}$, $\rho_{Blei} = 11{,}2 \frac{g}{cm^3}$).

b) Für Elektronen ergibt sich die mittlere Reichweite aus

$$R = -\int_{E_0}^{0} \frac{dE}{dE/dx},$$

wobei $E_0 = 4\ MeV$ die Anfangsenergie des Elektrons ist und der Energieverlust betrage $8\ MeV/cm$.

c) In einem Eisenblock nimmt die Intensität eines Neutronenstrahls auf einer Strecke von $3\ cm$ um einen Faktor 2 ab.
Wie dick muss der Eisenblock sein, damit die Intensität um den Faktor
   a. 8
   b. 128

   verringert wird? Der Neutronenstrahl verhält sich wie eine ebene Welle.

d) Die Intensität I eines Gamma-Strahls der Energie $15\ MeV$ wird durch eine $1\ cm$ dicke Bleiplatte um einen Faktor 2 verringert.
   a. Um welchen Faktor wird I durch eine $5\ cm$ dicke Platte verringert?
   b. Wie dick muss die Platte sein, damit I um einen Faktor 1000 abnimmt?

<u>Lösung:</u>

a) Aus der Proportionalitätseigenschaft folgt

$$\frac{R_L}{R_W} \propto \frac{\rho_W}{\rho_L} \rightarrow R_W = \frac{R_L \cdot \rho_L}{\rho_W} = 32{,}3\ \mu m$$
$$\frac{R_L}{R_B} \propto \frac{\rho_B}{\rho_L} \rightarrow R_B = \frac{R_L \cdot \rho_L}{\rho_B} = 2{,}88\ \mu m$$

b) Für die Reichweite von Elektronen folgt

$$R = \frac{E_0}{dE/dx} = \frac{4\ MeV}{8\ MeV/cm} = 0{,}5\ cm$$

c) Die Intensität des Neutronenstrahls nimmt analog zu einer ebenen Welle exponentiell ab: $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$. Aus $I(3cm) = I_0/2$ folgt für den Abschwächungskoeffizienten $\mu = 0{,}23/cm$. Die benötigte Bleidicke ergibt sich somit aus $x = -\frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$.
   a. $x = -\frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{1}{8}\right) = 9{,}04\ cm$
   b. $x = -\frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{1}{128}\right) = 21{,}1\ cm$

d) Analog zu c) lässt sich der Abschwächungskoeffizient bestimmen:

$$I(1cm) = \frac{I_0}{2} \rightarrow \mu = 0{,}69/cm$$

   a. $I(5cm) = I_0 e^{-\mu \cdot 5cm} = I_0/31{,}5$
   b. $x = -\frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{1}{1000}\right) = 10\ cm$

3) <u>Römisches Blei und kosmogene Aktivierung:</u>

Blei von gesunkenen Schiffen eignet sich hervorragend als Abschirmmaterial für Experimente zur Suche nach seltenen Ereignissen. Durch die lange Lagerung sind die vorhandenen radioaktiven Atome zerfallen und das Wasserschild verhindert eine neuerliche kosmogene Aktivierung des Materials.
Berechnen Sie die maximale Bleimenge, die in einem Experiment verbaut werden kann, wenn die durch den Transport bedingte kosmogene Aktivierung zu einer maximalen Aktivität des Bleis von $10^{-3}\ Zerfällen/y$ führen darf.
Wir groß darf ihr würfelförmiges Experiment maximal sein, wenn die Bleiabschirmung eine Dicke von 20 cm haben soll?

Berücksichtigen Sie dafür folgende Annahmen:

- Die Transportstrecke beträgt $1000\ km$ auf Meeresniveau mit einer Transportgeschwindigkeit von $30\ km/h$.

- Das entstehende Nuklid sei ^{40}K mit einer Halbwertszeit $T_{1/2} = 1{,}25 \cdot 10^9 y$.
- Die Aktivierung geschehe ausschließlich durch Myonen, wobei der Fluss $\phi = 1/cm^2 \cdot s$ und der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung des ^{40}K $\sigma = 4 \cdot 10^{-29}\ cm^2$ beträgt.

Gehen Sie wie folgt vor:

i. Berechnen Sie die maximal erlaubte Anzahl N_K an ^{40}K-Atomen im Blei.

ii. Bestimmen Sie die dafür maximal erlaubte Produktionsrate $P_K = \frac{dN_K}{dt}$, wobei t die Transportdauer ist.

iii. Für P_K gilt weiter $P_K = \sigma \cdot \phi \cdot N_B$, wobei N_B die Anzahl an Bleiatomen ist. Bestimmen Sie hieraus die maximal zulässige Bleimasse und das Bleivolumen, aus dem sich dann die Experimentgröße berechnen lässt ($\rho = 11{,}34 \frac{g}{cm^3}, M_B = 207\ g/mol$).

Lösung:

i. Aus der geforderten maximalen Aktivität $A = 10^{-3}/y$ folgt mit $A = \lambda \cdot N_K$ und $\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} = 5{,}55 \cdot 10^{-10}/y$: $\quad N_K = \frac{A}{\lambda} = 1{,}8 \cdot 10^6$

ii. Die Transportdauer beträgt $t = 2000\,\text{min} = 33{,}3\,h$. Da die Transportdauer $t \ll T_{1/2}$ kann der Zerfall von ^{40}K während des Transports vernachlässigt werden, so dass für die Produktionsrate folgt: $P_K = \frac{N_K}{t} = \frac{900}{min} = \frac{15}{s}$.

iii. Für die maximal zulässige Anzahl an Bleiatomen folgt aus $P_K = \sigma \cdot \phi \cdot N_B$:
$$N_B = \frac{P_K}{\sigma \cdot \phi} = \frac{15/s}{4 \cdot 10^{-29}\ cm^2 \cdot 1/(cm^2 \cdot s)} = 3{,}75 \cdot 10^{29}$$
Dies entspricht einer Bleimenge von $m_B = 207 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}75 \cdot 10^{29}\ kg = 1{,}29 \cdot 10^5\ kg$ und damit einem Volumen von $V = m_B/\rho = 11{,}4\ m^3$.
Bei einer Dicke der Bleiabschirmung von $d = 0{,}2\ m$ darf jede Seite des Würfels maximal eine Fläche $A = V/(6 \cdot d) = 9{,}5\ m^2$ haben und damit eine maximale Kantenlänge von etwa $3\ m$.

4) <u>Radioaktives Gleichgewicht:</u>

Eine der Hauptuntergrundquellen bei der Suche nach seltenen Ereignissen sind radioaktive Zerfälle im Detektormaterial. In allen verwendeten Materialien befinden sich radioaktive Elemente aus den natürlichen Zerfallsreihen von $^{238}U, ^{235}U, ^{232}Th$. Wenn das erste Element einer solchen Zerfallsreihe sehr langsam zerfällt, bildet sich ein stationärer Zustand aus, das radioaktive Gleichgewicht.
Ein Beispiel ist ^{226}Ra aus der ^{235}U Zerfallsreihe:
$$^{226}_{88}Ra \xrightarrow{\lambda_1,\ 1600\ y} {}^{222}_{86}Rn \xrightarrow{\lambda_2,\ 3{,}823\ d} {}^{218}_{84}Po$$

a) Berechnen Sie die Zerfallskonstanten $\lambda_{1,2}$ aus den gegebenen Halbwertszeiten.

b) Ausgehend von einer bestimmten Menge Radium entsteht zuerst Radon und anschließend Polonium durch den Zerfall von Radon. Wie lauten die entsprechen den Geschwindigkeitsgleichungen $\frac{d[Radon]}{dt}$ (das Symbol $[Radon]$ steht für die zur Zeit t vorliegende Anzahl an Radonatomen)?

c) Zu Beginn steigt $[Radon]$ an, aber dann macht sich der Zerfall zu Polonium bemerkbar, bis ein stationärer Zustand erreicht wird, bei dem gleich viele Radon-Atome entstehen wie zerfallen. Wie groß ist das Verhältnis $[Radium]/[Radon]$ im radioaktiven Gleichgewicht?

Lösung:

a) Für die Zerfallskonstanten gilt:

$$\lambda_1 = \ln(2)\,/1600\;y = 1{,}37 \cdot 10^{-11}/s,\; \lambda_2 = \ln(2)\,/3{,}82\;d = 2{,}1 \cdot 10^{-6}/s$$

b) Die Gleichung für die Entstehung von Radon aus Radium ist gegeben durch

$$\frac{d[Radon]}{dt} = \lambda_1 \cdot [Radium],$$

während für den Zerfall von Radon gilt

$$-\frac{d[Radon]}{dt} = \lambda_2 \cdot [Radon].$$

c) Das radioaktive Gleichgewicht wird erreicht, wenn gleich viele Radonatome gebildet werden wie zerfallen, d.h. wenn

$$\lambda_1 \cdot [Radium] = \lambda_2 \cdot [Radon] \;\; \rightarrow \;\; \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{[Radium]}{[Radon]} = \frac{T_{1/2}(Ra)}{T_{1/2}(Rn)} = \frac{153000}{1}$$

5) Radioaktivität:

Die Kenntnis der Halbwertszeiten verschiedener natürlich vorkommender radioaktiver Isotope wird benutzt, um Proben, z.B. aus Meteoriten oder aus der Erde zu datieren.

a) Die natürliche Isotopenzusammensetzung von Uran in unserem Sonnensystem ist 99,28% ^{238}U und 0,72% ^{235}U. Wie alt ist das Sonnensystem unter der Annahme, dass beide Isotope bei der Entstehung gleich häufig waren? ($\tau\left(^{235}U\right) = 1{,}015 \cdot 10^9\;y,\; T_{1/2}\left(^{238}U\right) = 4{,}5 \cdot 10^9\;y$)

b) Wie groß ist der Anteil von ^{238}U, der seit der Entstehung der Erdkruste vor 4,2 Mrd. Jahren zerfallen ist?

c) Es wird ein $200\;g$ schwerer Knochen gefunden, dessen Alter mit der Kohlenstoffmethode zu bestimmen ist. Die gemessene ^{14}C-Zerfallsrate beträgt 400 Zerfälle pro Minute. In einem lebenden Organismus treten pro Minute und Gramm 15 Zerfälle auf. Wie alt ist der Knochen? ($T_{1/2} = 5730\;y$)

Übungen zur Astroteilchenphysik	**WS 13/14**
5. Übungsblatt	**15.01.2014**

Lösung:

a) Es gilt für beide Isotope das Zerfallsgesetz $N_{1,2}(t) = N_{0_{1,2}} e^{-\lambda_{1,2} t}$, wobei $N_{0_1} = N_{0_2}$, $N_1(t) = 0{,}9928,\ N_2(t) = 0{,}0072,\ \lambda_1 = 1{,}54 \cdot 10^{-10}/y,\ \lambda_2 = 9{,}85 \cdot 10^{-10}/y$. Somit folgt: $\frac{N_1(t)}{N_2(t)} = e^{t(\lambda_2 - \lambda_1)} \rightarrow t = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot \ln\left(\frac{N_1(t)}{N_2(t)}\right) = 5{,}93 \cdot 10^9\ y$.

b) Für die Anzahl der noch nicht zerfallenen Uranatome gilt: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, wobei $\lambda = \ln(2)/T_{1/2} = 1{,}54 \cdot 10^{-10}/y$. Es folgt für den Anteil bereits zerfallener Atome: $n = \frac{N}{N_0} = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = 0{,}48$, d.h. 48%.

c) Für die Aktivität gilt: $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$, wobei $\lambda = \ln(2)/T_{1/2} = 1{,}21 \cdot 10^{-4}/y,\ A(t) = 400/min,\ A_0 = 15 \cdot 200/min$. Damit folgt für das Alter des Knochens: $t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right) = 16652\ y$.