Institut für Kernphysik, Campus Nord

Dr. M. Roth und Dr. D. Schmidt Besprechung am 12.5.2020

Name, Vorname : ______________________________

Frage 1 — **Relativistisch invariante Größen** — ***Punktzahl 4***

(a) Zeigen Sie, dass die Rate $\mathrm{d}N_C/(\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t)$ (Zahl pro Volumen und Zeiteinheit) der Erzeugung von Teilchen C durch die Wechselwirkung von Teilchen A mit Teilchen B relativistisch invariant ist, d.h. in jedem Bezugsystem gleich ist. [2]

(b) Die Teilchenerzeugungsrate im Ruhesystem der Teilchen B ist durch [2]

$$\frac{\mathrm{d}N_C}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t} = n_A \cdot n_B \cdot c \cdot |\vec{\beta}_A| \cdot \sigma_{AB\to C}$$

gegeben. Die Teilchenzahldichten seien n_A und n_B und die Geschwindigkeit der Teilchen A ist durch $\vec{v}_A = c\vec{\beta}_A$ gegeben. Zeigen Sie, dass in einem beliebigen Referenzsystem die Erzeugungsrate dann durch

$$\frac{\mathrm{d}N_C}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t} = n'_A \cdot n'_B \cdot c \cdot \beta'_{rel}\left(1 - \vec{\beta}'_A \cdot \vec{\beta}'_B\right)\sigma_{AB\to C}$$

gegeben ist, wobei angenommen wird, dass sich in diesem System die Teilchen A und B mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}'_A = c\vec{\beta}'_A$ und $\vec{v}'_B = c\vec{\beta}'_B$ bewegen und die Relativgeschwindigkeit durch $\beta'_{rel} = |\beta'_A - \beta'_B|$ gegeben ist.
Hinweis: Nutzen Sie, dass der Wirkungsquerschnitt $\sigma_{AB\to C}$ eine lorentzinvariante Größe darstellt. Berücksichtigen Sie die Lorentzkontraktion des Volumens zur Berechnung von n_i. Beachten Sie, dass Relativgeschwindigkeiten per Konstruktion lorentzinvariant sind. Als Ansatz berechnen Sie $p_A \cdot p_B = p_A^0 \cdot p_B^0$ mit dem Vierervektor $p_i = mc\gamma_i \cdot (1, \vec{\beta}_i)^T$.

(c) Zeigen Sie, dass die Größen $\mathrm{d}^3\vec{p}/E$ (i) und $\mathrm{d}t/E$ (ii) relativistisch invariant sind. [1 (bonus)]
Hinweis: Sie können das Problem (i) auf eine räumliche Koordinate reduzieren. Warum? Als Lösungsansatz betrachten Sie $\mathrm{d}p'_x/\mathrm{d}p_x$ bzw. $\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t$.

Frage 2 — **Energieverteilung erzeugter Sekundärteilchen** — ***Punktzahl 4***

Leiten Sie einen analytischen Ausdruck für die Energieverteilung der pro Volumen erzeugten Sekundärteilchen der Sorte C her, die durch die Wechselwirkung der Teilchen A mit dem sich in Ruhe befindlichen Restgas B erzeugt werden. Der Fluss der Teilchen A sei durch

$$\frac{\mathrm{d}N_A}{\mathrm{d}E_A\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega} = \Phi_A(E_A) = \Phi_0 E_A^{-p}$$

gegeben (E_A ≙ Energie eines Teilchens der Sorte A, $\mathrm{d}S$ ≙ Flächenelement, $\mathrm{d}t$ ≙ Zeit- und $\mathrm{d}\Omega$ ≙ Raumwinkelelement; Φ beschreibt den monochromatischen Fluss parallel einfallender Teilchen). Die Teilchen der Sorte C werden mit dem Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{AB\to C}}{\mathrm{d}x} = \sigma_0 f(x),$$

$x = E_C/E_A$ und $x \in [0,1]$ erzeugt. Die Teilchenzahldichte des Restgases (d.h. interstellares Medium) sei $n_B = \mathrm{d}N_B/\mathrm{d}V$. Diskutieren Sie den Spezialfall, dass die Teilchen A durch Fermibeschleunigung, d.h. mit $p = 2$ erzeugt werden.

Frage 3 — **Pionzerfall in zwei Photonen** — ***Punktzahl 4***

Betrachtet man den π^0-Zerfall im Ruhesystem, dann entstehen zwei Photonen (die Wahrscheinlichkeit hierfür ist ungefähr 98,8%), die in entgegengesetzter Richtung wegfliegen und deren Energie jeweils die halbe Ruheenergie des Pions ist.

(a) Finden Sie die maximale und minimale Energie, die ein Photon im Laborsystem haben kann, wenn es im Zerfall eines π^0 erzeugt wurde, welches in diesem System die Energie $E_{\pi^0} > m_{\pi^0}c^2$ hatte. [1½]

(b) Berechnen Sie die Energieverteilung $\frac{\mathrm{d}N_\gamma}{\mathrm{d}E_\gamma} = \frac{\mathrm{d}N_\gamma}{\mathrm{d}\cos\theta^\circ}\frac{\mathrm{d}\cos\theta^\circ}{\mathrm{d}E_\gamma}$ der Photonen für ein Pion der Energie E_{π^0}. Nutzen Sie die Tatsache aus, dass im Ruhesystem ($^\circ$) des π^0 die Winkelverteilung $\frac{\mathrm{d}N_\gamma}{\mathrm{d}\cos\theta^\circ}$ isotrop ist. [1½]

(c) Wie groß ist die minimale Energie, die ein π^0 haben muss, so dass ein Photon der Energie E_γ im Zerfall erzeugt werden kann? [1]