Dr. M. Roth und Dr. D. Schmidt Besprechung am 9.6.2020

Name, Vorname : ____________________

Frage 1 —— **Synchrotronstrahlung** —— ***Punktzahl 4***

Ein sehr häufiger Erzeugungsprozess für Photonen ist Synchrotronstrahlung im Magnetfeld. Für einen isotropen Fluss von Elektronen der Energie E_e erhält man für die Frequenzverteilung der abgestrahlten Photonen ($E_\gamma = h\nu$) pro Elektron

$$E_\gamma \frac{\mathrm{d}N_\gamma(\nu,\gamma_e)}{\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t} \simeq 1.8 \frac{\sqrt{3}e^3 B_\perp}{m_e c^2} \left(\frac{\nu}{\nu_\mathrm{c}}\right)^{\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{\nu}{\nu_\mathrm{c}}\right)$$

mit der charakteristischen Frequenz

$$\nu_\mathrm{c} = \frac{3eB_\perp}{4\pi m_e c}\left(\frac{E_e}{m_e}\right)^2 = \frac{3eB_\perp}{4\pi m_e c}\gamma_e^2.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es die Energieverteilung der abgestrahlten Photonen für eine Elektronenpopulation zu berechnen, deren Energieverteilung einem Potenzgesetz mit Index p folgt

$$\frac{\mathrm{d}N_e}{\mathrm{d}E_e} = a\, E_e^{-p} =: h(\gamma_e)$$

(mit a einer geeigneten Konstanten). Hierzu gehen Sie wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$g(\nu,\gamma_e) := \frac{\mathrm{d}N_\gamma(\nu,\gamma_e)}{\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t} = c(\nu)\,\gamma_e^{-2/3} \exp\left(-d(\nu)\gamma_e^{-2}\right).$$

Die Funktionen $c(\nu)$ und $d(\nu)$ sind abhängig von der Photonfrequenz ν.

(b) Nun gilt es für eine gegebene Photonenergie alle beitragenden Elektronenergien durch ein Faltungsintegral zu berücksichtigen. Berechnen sie

$$G(\nu) := \frac{\mathrm{d}N_\gamma(\nu)}{\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t} = \int_1^\infty \mathrm{d}\gamma_e\, g(\nu,\gamma_e)\, h(\gamma_e).$$

Wie kommt es zu den angegebenen Integrationsgrenzen? Benutzen Sie die *Methode des steilsten Abstiegs* zur Lösung dieser Teilaufgabe: Unter der Annahme alle Voraussetzungen an die Funktion $f(\gamma_e)$ seien erfüllt, können sie folgende Identität ausnutzen

$$G(\nu) = \int_1^\infty \mathrm{d}\gamma_e\, e^{-f(\gamma_e)} = e^{-f(\gamma_e^\mathrm{max})}\left(\frac{2\pi}{f''(\gamma_e^\mathrm{max})}\right)^{1/2}.$$

Der Gammafaktor γ_e^max bei der die Funktion $e^{-f(\gamma_e)}$ maximal ist, ist hierbei zu verwenden. Sie sollten als Lösung folgende Abhängigkeit erhalten:

$$G(\nu) \propto \nu^{-(p+1)/2}.$$

Frage 2 —— **Expansion eines Supernova-Überrests** —— ***Punktzahl 4***

Leiten Sie das Potenzgesetz für die Zeitabhängigkeit der Expansion $R_\mathrm{S}(t) \propto t^b$ eines Supernova-Überrests in verschiedenen Phasen seiner Entwicklung her. Beachten Sie dabei, dass das Verhältnis der ausgeworfenen Materie (Ejekta, m_EJ) relativ zur verdrängten Materie des interstellaren Mediums, m_ISM, zu verschiedenen Grenzfällen führt. Die Masse der ausgeworfenen Materie befindet sich hauptsächlich in der Schale des Supernova-Überrests (Kugelsymmetrie angenommen).

(a) Die Phase des freien Strömens ist durch $m_\mathrm{EJ} \gg m_\mathrm{ISM}$ gekennzeichnet. Vernachlässigen Sie für diese Phase die Masse des verdrängten interstellaren Mediums. Bestimmen Sie durch Ausnutzung der Erhaltung der kinetischen Energie $E_\mathrm{SNR} = \frac{m_\mathrm{EJ}}{2}v_\mathrm{S}^2 = \frac{m_\mathrm{EJ}}{2}\dot{R}_\mathrm{S}^2$ die Zeitabhängigkeit des Radius' $R_\mathrm{S}(t)$ der expandierenden Schale.

(b) Ein Supernova-Überrest tritt in die Sedov-Taylor-Phase ein, wenn $m_{\text{EJ}} \leq m_{\text{ISM}}$ gilt. Betrachten Sie für die Rechnung den Grenzfall $m_{\text{EJ}} \ll m_{\text{ISM}}$. Beachten Sie, dass bei konstanter Massedichte ρ_{ISM} die verdrängte Masse sich mit R_{S} verändert. In diesem Falle ergibt die Energieerhaltung ebenso eine Differentialgleichung in $R_{\text{S}}(t)$. Lösen Sie diese mit dem Ansatz $R_{\text{S}}(t) = at^b$.

(c) In der Schneepflugphase, welche der Sedov-Taylor-Phase folgt, wird die kinetische Energie der Schale durch Abstrahlungsprozesse abgegeben und trägt nicht mehr zur Expansion des Supernova-Überrests bei. Die weitere Expansion des Überrests erfolgt aufgrund der hohen Temperatur des Gases im Innern des Volumens V, welches sich adiabatisch ausdehnt. Betrachten Sie den Fall eines monoatomaren Gases für welches die Adiabatengleichung $pV^\kappa = \text{const}$ mit $\kappa = \frac{5}{3}$ gilt. Lösen Sie die Differentialgleichung $F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = Ap$ mit A der Fläche der expandierenden Schale und p dem Druck.

Frage 3 **Beschleunigung in Supernova-Überresten** ***Punktzahl 4***

Betrachten Sie die Interpretation des Spektrums des Supernova-Überrests RX J1713.7-3946 im Rahmen eines leptonischen Modells nach Berezhko und Völk. Nehmen Sie ein Potenzgesetz für die Energieverteilung der Elektronen an. Die wesentlichen Beiträge zur Emission kommen von Synchrotronstrahlung bei niedriger Energie und inverser Comptonstreuung am Mikrowellenhintergrund ($E_{\text{ph}}^{\text{CMB}} = k_{\text{B}}T \simeq k_{\text{B}}\,2.7\,\text{K} \simeq 2.3 \cdot 10^{-4}\,\text{eV}$) bei hoher Energie.

(a) Schätzen Sie den Index des Potenzgesetzes der Energieverteilung der beschleunigten Elektronen in der Schale des Supernova-Überrests ab unter Zuhilfenahme der Vorhersage in der gezeigten Grafik und des Resultats aus Aufgabe 1 (b).

(b) Schätzen Sie die maximale Energie der Elektronen ab. Beachten Sie, dass bei inverser Comptonstreuung der maximale Energieübertrag von einem Elektron auf ein Photon bei Kopf-an-Kopf-Stößen geschieht. Der Energieübertrag im Ruhesystem des Elektrons beträgt

$$E_{\text{ph}}^{\star} = \frac{E_{\text{ph}}}{1 + \frac{E_{\text{ph}}}{m_e}(1 - \cos\theta)}$$

mit θ dem Streuwinkel relativ zum Einfallswinkel des Photons der Energie E_{ph}.

(c) Schätzen Sie aus dem Maximum der Synchrotronstrahlung in Abbildung 1 ab, wie groß die charakteristische Frequenz ν_c ist. Leiten Sie aus der maximalen Energie der Elektronen die Magnetfeldstärke in der Schale des Supernova-Überrests ab.

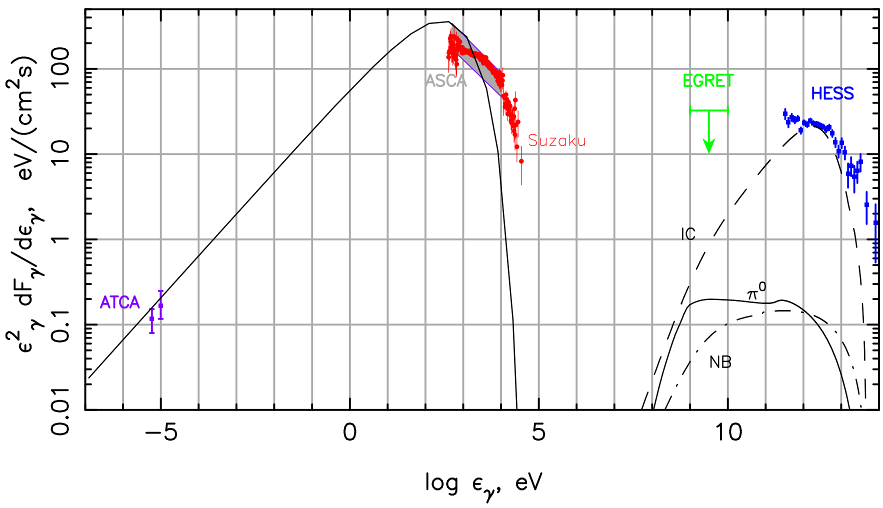

Abbildung 1: *Die Abbildung zeigt das energiegewichtete Photonspektrum ($E_\gamma^2 \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}E_\gamma}$) verschiedener Messungen des Supernova-Überrests RX J1713.7-3946 zusammen mit einer Vorhersage des leptonischen Modells nach Berezhko und Völk (2008). Die Energie $\epsilon_\gamma = E_\gamma$ auf der x-Achse ist entgegen der Darstellung im Zehnerlogarithmus gegeben, also* $\log_{10}$ *statt* log.