

Name, Vorname : _____

Frage 1 _____ **Quantenmechanischer Entartungsdruck** _____ **Punktzahl 4**

Die Gravitationskraft in Weißen Zwergen und Neutronensternen wird durch den quantenmechanischen Entartungsdruck kompensiert, der aus dem Paulischen Ausschließungsprinzip für Fermionen herrührt. Nutzen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation (hier einfach als $\Delta x \Delta p \approx \hbar$) und das Paulische Ausschließungsprinzip, um den Entartungsdruck für ein Elektronengas bei sehr niedriger Temperatur abzuschätzen. Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass die Elektronen sich alle mit einer betragsmäßig gleichen Geschwindigkeit bewegen.

Hinweis für Teilaufgaben (a)-(b): Betrachten Sie ein Elektronengas, dessen Druck sich laut kinetischer Gastheorie zu $P = \frac{1}{3} n p v$ berechnet mit n der Teilchenzahldichte, p dem Impuls und v der Teilchengeschwindigkeit. Der Impuls p sei vollkommen dominiert durch die Impulsunsicherheit der Unschärferelation.

- Bestimmen Sie den Entartungsdruck von Elektronen als Funktion der Massendichte des Weißen Zwergs für *nicht-relativistische* Elektron-Geschwindigkeiten.
- Bestimmen Sie die den Entartungsdruck von Elektronen als Funktion der Massendichte des Weißen Zwergs für *ultra-relativistische* Elektron-Geschwindigkeiten.
- Wie ändert sich der Druck, wenn es sich um den Entartungsdruck von Neutronen handelt?
- Schätzen Sie die maximale Masse eines Weißen Zwerges (Chandrasekhar-Grenze) ab, indem Sie einen Weißen Zwerg als Kugel mit homogener Dichte betrachten und den Gravitationsdruck im Zentrum des Sterns gleich dem Entartungsdruck setzen. Leiten Sie hierzu eine Formel für den Gravitationsdruck als Funktion des Kugelradius' her.

Frage 2 _____ **Pulsare und Teilchenbeschleunigung im elektrischen Feld** _____ **Punktzahl 4**

Betrachten Sie eine Region konstanten elektrischen Feldes $\vec{E} = E \vec{n}_z$ mit konstanter Leitfähigkeit σ . In diese Region seien Elektronen der Masse m_e mit einer Stromdichte $J = n_e e v$ injiziert. Der Widerstand des Plasmas in dieser Region sei einzig durch die Elektron-Elektron-Kollisionen hervorgerufen. Ziel dieser Aufgabe ist es den maximalen Lorentzfaktor γ_{\max} abzuschätzen, den die Elektronen erhalten können. Nehmen Sie an, E sei so groß, dass die Teilchengeschwindigkeit rasch c erreicht.

- Wie lautet die Formel für die Stromdichte bei gegebener Leitfähigkeit im elektrischen Feld (erinnern Sie sich hierzu an Ihre Elektrodynamik-Vorlesung)? Setzen Sie diese mit oben genannter Stromdichte gleich um die Elektronendichte zu berechnen.
- Schätzen Sie den mittleren Abstand $\langle R \rangle$ zwischen zwei Elektronen ab, indem Sie die Elektronendichte durch ein einzelnes Elektron innerhalb einer Kugel mit Radius R annähern.
- Wie viel Zeit vergeht zwischen zwei Kollisionen?
- Während dieser Zeit werden die Elektronen im elektrischen Feld beschleunigt. Wie groß ist γ_{\max} bei $E = 3 \cdot 10^{12} \text{ V/cm}$ und $\sigma = 1 \cdot 10^6 / \Omega \text{ m}$?

Frage 3 _____ **Protonenquelle und Verhältnis des Photonflusses zum Neutrinofluss** _____ **Punktzahl 4**

Es gibt eine universelle Beziehung zwischen dem Fluss von Photonen und Neutrinos von einer Quelle, in der Protonen beschleunigt werden. Es wird angenommen, dass die lokal beschleunigten Protonen höchstens ein Mal auf ihrem Weg von dem Inneren der Quelle zur Erde hadronisch streuen, d.h. Pionen als Sekundärteilchen erzeugen. (Bei häufigeren hadronischen Wechselwirkungen würde die Quelle ein sehr ineffizienter Beschleuniger sein, da die Protonen fast ihre gesamte Energie durch Streuprozesse verlieren würden.) Im Folgenden besteht die Aufgabe darin diese Beziehung für ein Energiespektrum der Protonen von $dN_p/dE_p \propto E_p^{-2}$ herzuleiten, wobei in guter Näherung angenommen werden kann, dass neutrale und geladene Pionen im Verhältnis 1:2 erzeugt werden ($\sigma_{\pi^0} = \sigma_{\pi^+} = \sigma_{\pi^-}$ und $\sigma_{\pi} = \sigma_{\pi^+} + \sigma_{\pi^-}$) und ihr

Erzeugungswirkungsquerschnitt in Protonwechselwirkungen durch

$$E_p \frac{d\sigma_\pi}{dE_\pi} = \sigma_\pi f\left(\frac{E_\pi}{E_p}\right) = \frac{d\sigma_\pi}{dx_\pi} = \sigma_\pi f(x)$$

mit $x = E_\pi/E_p$ beschrieben wird. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass alle Pion-Zerfallsprodukte gleiche Energien im Zerfallsprozess bekommen.

- (a) Die Lösung der Aufgabe 2 des ersten Übungsblatts ergab sich zu $J_C = 4\pi J_0 \sigma_0 E^{-2} \int_0^1 dx x f(x)$ mit $\int_0^1 dx x f(x) = \text{const.}$ Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme dieser Lösung den Pionfluss $J_\pi = J_{\pi^+ + \pi^-}$ bzw. J_{π^0} .
- (b) Wie viele Neutrinos entstehen beim Zerfall der geladenen Pionen und der nachfolgend zerfallenden Myonen insgesamt? Bestimmen Sie den Neutrinofluss $J_\nu(E) = \int dE' g(E, E') J_\pi(E')$. Die Energieverteilung $g(E, E')$ bei gegebener Pionenergie E' ist bestimmt durch die Forderung, dass alle Pion-Zerfallsprodukte die gleiche Energie E im Zerfallsprozess bekommen. *Hinweis:* Nutzen Sie die folgende Identität, die sich in der Theorie der Distributionen beweisen lässt: $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$.
- (c) Verfahren Sie analog zur Bestimmung des Photonenflusses J_γ .
- (d) Setzen Sie die Flüsse aus den vorhergehenden Teilaufgaben ins Verhältnis. Sie sollten eine Konstante als Lösung erhalten.