KIT **Astroteilchenphysik II: Kosmische Strahlung** **WS2020**

Übungsblatt 2

Dr. Markus Roth, Max Stadelmaier
Institut für Astroteilchenphysik

19.11.2020 - 03.12.2020
Gesamtpunktzahl: 20

Nächster Termin

Donnerstag, 03.12.
10.00 Uhr - 11.30 Uhr
https://zoom.us/j/99143262888?pwd=WVhsS1diWVlZYWlvYXlyMHd4NUF6UT09.
Meeting-ID: 991 4326 2888
Kenncode: 601988

5 Tscherenkow-Strahlung 4

Die Tscherenkow-Strahlung (oder auch Wawilow-Tscherenkow-Strahlung), die von hochenergetischen Teilchen wie z.B. Atomkernen der kosmischen Strahlung in geeigneten Medien produziert wird, wurde beim HEAO-3-Satelliten der NASA genutzt, um die chemische Zusammensetzung der ionisierten Elemente kosmischer Strahlung zu bestimmen. Aerogel, ein sehr leichter und hochporöser Feststoff mit einem Brechungsindex von $n = 1.053$, gehört zu den Materialien, die Tscherenkow-Strahlung erzeugen und wurde beim HEAO-3-Satelliten dafür eingesetzt.

Zeigen Sie, dass ein Atomkern mindestens eine Energie von etwas mehr als dreimal seiner Ruheenergie benötigt, um im HEAO-3-Satelliten detektiert zu werden.

6 Auflösungseffekte beim gemessenen Teilchenfluss 6

Ein Satellitenexperiment misst den Fluss von Protonen oberhalb der Erdatmosphäre. Dabei kann die Energie jedes der gemessenen Protonen nur mit einer gewissen Messgenauigkeit bestimmt werden. Der Logarithmus des Verhältnisses zwischen der wahren und der rekonstruierten Energie ist normalverteilt mit einer Varianz von σ^2. Das Verhältnis zwischen wahrer und rekonstruierter Energie ist demnach log-normal verteilt.

Wie groß ist der tatsächliche Fluss, $\Phi(E_{\text{real}})$, der Protonen, wenn der Satellit einen Fluss gemäß eines Potenzgesetzes von

$$\Phi(E_{\text{rec}}) = \Phi_0 \, E_{\text{rec}}^{-\gamma} \tag{1}$$

feststellt? Nutzen Sie das Faltungsintegral

$$\Phi(E_{\text{real}}) = \int \mathrm{d}E_{\text{rec}} \; P(E_{\text{rec}}) \, \Phi(E_{\text{rec}}) \, . \tag{2}$$

Wie verhält sich der wahre Fluss zum gemessenen?

HINWEISE:
→ Für Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen gilt

$$P(x) = \left| \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \right| P(y(x)) \,.$$

→ Nehmen Sie folgendes Integral als gegeben an:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-(ax^2+bx)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \; \mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}$$

7 Dynamo-Effekt beim rotierenden schwarzen Loch 1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 10

Rotierende nichtstarre geladene Körper, wie z.B. Gase, in lokal gebunden Systemen erzeugen mitunter stabile Magnetfelder. Solche Magnetfelder sind u.a. wesentlich für die Emission kosmischer Strahlung. Betrachten Sie Plasma, welches in einer dünnen Kreisscheibe um ein supermassives schwarzes Loch rotiert.

(a) Leiten Sie unter Annahme newtonscher Gravitation einen Ausdruck für die Kreisfrequenz, Umlaufzeit und die Geschwindigkeit eines Masseelements der Kreisscheibe in Abhängigkeit des Abstandes zum schwarzen Loch her. Das Plasma bewege sich reibungsfrei. Das newtonsche Gravitationspotential eines schwarzen Loches der Masse M in natürlichen Einheiten ist gegeben durch

$$V_\mathrm{N} = -\frac{M}{r} \,. \tag{3}$$

Schwarze Löcher tragen meist einen Eigendrehimpuls, J, (*warum?*) der zum Gravitationspotential beiträgt. Aus den Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) kann mit Hilfe der Kerr-Metrik, die rotierende und geladene schwarze Löcher beschreibt, ein effektives pseudo-newtonsches Gravitationspotential hergeleitet werden, welches die Effekte der ART in sehr guter Näherung beschreibt. Das effektive Potential ist gegeben durch

$$V_\mathrm{eff.} = V_\mathrm{N} + \frac{j^2}{2r^2} + \frac{1}{2}(1-\epsilon^2)\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{r_\mathrm{s}}{2r^3}(j - a\epsilon) \,, \tag{4}$$

mit

$$\begin{aligned}
a &= \frac{J}{M} \\
j &= \left((r^2+a)^2 - \Delta\, a^2 \,\sin^2\theta\right) \frac{\dot\phi \,\sin^2\theta}{\Sigma} - a\, r_\mathrm{s}\, r \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\dot t \\
\epsilon &= a\, r_\mathrm{s}\, r \frac{\dot\phi \,\sin^2\theta}{\Sigma} + \left(1 - \frac{r_\mathrm{s} r}{\Sigma}\right)\dot t \\
\Delta &= r^2 - r\, r_\mathrm{S} + a^2 \\
\Sigma &= r^2 + a^2 \,\cos^2\theta \\
r_\mathrm{s} &= 2M \,.
\end{aligned}$$

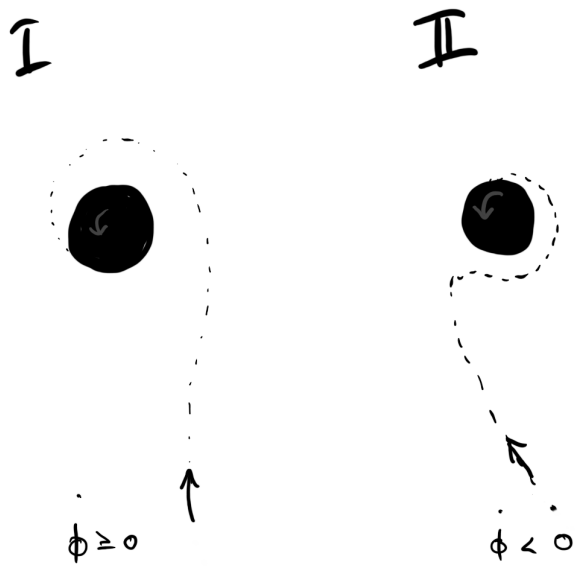
Dabei sei r der Radius des betrachteten Testteilchens (in diesem Fall das Masseelement des Plasmas), $\dot{\phi}$ die Winkelgeschwindigkeit relativ zur Eigenrotation des schwarzen Loches, r_s der Schwarzschildradius, θ der Zenithwinkel und $\dot{t}$ die Änderung der Eigenzeit. In führender Ordnung vereinfacht sich das Potential zu

$$V_{\text{eff}} \simeq -\frac{M}{r} - \frac{M}{r}\,\dot{\phi}\,\sin^2\theta\,. \tag{5}$$

Zur Veraunschaulichung können Sie bspw. ein bereits vorbereitetes Mathethmatica-Notebook (`https://web.ikp.kit.edu/stadelmaier/A7.nb`) nutzen, in dem das Potential definiert ist (zum Lösen der Aufgabe nicht notwendig).

(b) Wie und warum ändert die Rotation des schwarzen Loches die Umlaufzeit aus (a)?

(c) Zeigen Sie, dass ein Teilchen, das aus $r \to \infty$ mit einer relativen Rotation $\dot{\phi} < 0$ in das schwarze Loch einfällt, seine Bahn entsprechend der Rotation des schwarzen Loches anpasst (siehe I und II).



Welches Verhalten erwarten Sie für ein Teilchen das unter $\theta = 0$, also senkrecht zur Ekliptik, einfällt?

(d) Stellen sie das effektive Potential (Eq. (5)) in einem Schaubild im Bereich

$$r_s \leq r \leq 30\,r_s$$

grafisch dar.

Das Magnetfeld, das von in einem Kreis rotierender geladener Teilchen mit Radius R und Dicke l erzeugt wird, nimmt in Zylinderkoordinaten e_ρ, e_ϕ und e_z die Form

$$B_\rho = \frac{I}{l}\frac{1}{\rho}\left[\sqrt{(\rho+R)^2+\zeta^2}\Big((2-m)\,K(m) - 2\,E(m)\Big)\right]_{\zeta=z+l/2}^{\zeta=z-l/2} \tag{6}$$

$$B_\phi = 0 \tag{7}$$

$$B_z = 2\,\frac{I}{l}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{(\rho+R)^2+\zeta^2}}\left(\frac{\rho-R}{\rho+R}\,\Pi(n,m) - K(m)\right)\right]_{\zeta=z+l/2}^{\zeta=z-l/2} \tag{8}$$

mit

$$m = 4R\rho / \left((\rho + R)^2 + \zeta^2 \right)$$
$$n = 4R\rho / (\rho + R)^2 ,$$

sowie den vollständigen elliptischen Integralen erster, zweiter und dritter Ordnung, K, E und Π.

Sie können die Kreisscheibe aus geladenem Plasma als Superposition vieler Ringe von infinitesimaler Breite betrachten. Das resultierende Magnetfeld ergibt sich aus dem Integral

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \int_{R_{\text{min}}}^{R_{\text{max}}} \vec{B}(R) \mathrm{d}R \,. \tag{9}$$

(e) Stellen Sie das Magnetfeld, dass von geladenem Plasma in der Akkretionsscheibe des schwarzen Loches erzeugt wird, grafisch dar. Nehmen Sie an, dass sich die Scheibe zwischen

$$R_{\text{min}} = r_s$$

und

$$R_{\text{max}} \simeq 1000 \cdot r_s$$

mit konstanter Dichte ausdehnt. Beachten Sie hierbei, dass der Strom, der durch ein Masseelement erzeugt wird, implizit vom Radius abhängt, $I = I(R)$.

HINWEISE:
$\rightarrow$ Sie können das vorbereitete Mathematica-Notebook benutzen, dort sind Ausdrücke für das Magnetfeld eines Kreisrings in Zylinderkoordinaten und euklidischen Koordinaten bereits definiert. Das Integral in Eq. (9) kann als Summe über $\mathcal{O}(10)$ diskrete Kreisringe genähert werden.

ANMERKUNG:
Dies ist eine vereinfachte und nicht die gebräuchliche Methode, um die Bewegung von Testkörpern oder Fluiden um schwarze Löcher zu beschreiben, und dient lediglich der Veranschaulichung. Dem geneigten Leser seien

- **Gravitation** *(Misner, Thorne, Wheeler; 1970)* Kap. 33.3, und
- **Introduction to General Relativity** *('t Hooft; 1998)* Kap. 13

empfohlen.