

Aufgabe 1:

a)

$$H_{\pm} = \sum_{k, k', \sigma} B_{k'k} (C_{k'\sigma}^{\dagger} C_{k\sigma} \pm C_{-k-\sigma}^{\dagger} C_{-k'-\sigma})$$

$$C_{k\uparrow} = u_k^* \gamma_{k\uparrow} + v_k \gamma_{k\downarrow}^{\dagger} \quad C_{-k\downarrow}^{\dagger} = -v_k^* \gamma_{k\uparrow} + u_k \gamma_{k\downarrow}^{\dagger}$$

$$C_{k'\uparrow}^{\dagger} C_{k\uparrow} = (u_{k'}^* \gamma_{k'\uparrow}^{\dagger} + v_{k'}^* \gamma_{k'\downarrow}^{\dagger}) (u_k \gamma_{k\uparrow} + v_k \gamma_{k\downarrow}^{\dagger})$$

##

Wir nehmen im weiteren an, dass u_k, v_k reell sind

$$\Rightarrow C_{k'\uparrow}^{\dagger} C_{k\uparrow} = u_{k'} u_k \gamma_{k'\uparrow}^{\dagger} \gamma_{k\uparrow} + v_{k'} v_k \gamma_{k'\downarrow}^{\dagger} \gamma_{k\downarrow}^{\dagger} + u_{k'} v_k \gamma_{k'\uparrow}^{\dagger} \gamma_{k\downarrow}^{\dagger} + v_{k'} u_k \gamma_{k'\downarrow}^{\dagger} \gamma_{k\uparrow}$$

$$C_{k'\downarrow}^{\dagger} C_{-k'\downarrow} = (-v_{k'}^* \gamma_{k'\uparrow} + u_{k'} \gamma_{k'\downarrow}^{\dagger}) (-v_k^* \gamma_{k\uparrow}^{\dagger} + u_k \gamma_{k\downarrow}^{\dagger})$$

$$= v_{k'} v_k \gamma_{k'\uparrow} \gamma_{k\uparrow}^{\dagger} + u_{k'} u_k \gamma_{k'\downarrow}^{\dagger} \gamma_{k\downarrow}^{\dagger} - v_{k'} u_k \gamma_{k'\uparrow} \gamma_{k\downarrow} - u_{k'} v_k \gamma_{k'\downarrow}^{\dagger} \gamma_{k\uparrow}^{\dagger}$$

$$\Rightarrow B_{k'k} (C_{k'\sigma}^{\dagger} C_{k\sigma} \pm C_{-k-\sigma}^{\dagger} C_{-k'-\sigma}) \xrightarrow{\text{Ubergang } k \rightarrow k'} \\ = B_{k'k} \left[(u_{k'} u_k \mp v_{k'} v_k) (\gamma_{k'\sigma}^{\dagger} \gamma_{k\sigma} \pm \gamma_{-k-\sigma}^{\dagger} \gamma_{-k'-\sigma}) + (v_{k'} u_{k'} \pm u_{k'} v_k) (\gamma_{k'\sigma}^{\dagger} \gamma_{-k-\sigma}^{\dagger} \pm \gamma_{-k'-\sigma} \gamma_{k\sigma}) \right]$$

$$\Rightarrow M_{k'k} = B_{k'k} (u_{k'} u_k \mp v_{k'} v_k)$$

Ohne Index 1:

$$\begin{aligned}
 (u u' \mp v v')^2 &= \frac{1}{4} \left(\left[\left(1 + \frac{k}{E} \right) \left(1 + \frac{k'}{E'} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \mp \left[\left(1 - \frac{k}{E} \right) \left(1 - \frac{k'}{E'} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left(\left(1 + \frac{k}{E} + \frac{k'}{E'} + \frac{k k'}{E E'} \right) + \left(1 - \frac{k}{E} - \frac{k'}{E'} + \frac{k k'}{E E'} \right) \right. \\
 &\quad \left. \mp 2 \left[\left(1 - \frac{k^2}{E^2} \right) \left(1 - \frac{k'^2}{E'^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k k'}{E E'} \mp \frac{\Delta^2}{E E'} \right) \\
 &\quad 1 - \frac{k^2}{E^2} = 1 - \frac{k^2}{k^2 + \Delta^2} = \frac{\Delta^2}{E^2}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 1b

$$M_{k k'} \rightarrow \frac{1}{2} B_{k k'} \left(1 \mp 1 + \frac{k k'}{E E'} \right)$$

$\underbrace{\frac{k k'}{E E'}}_{\approx \frac{\Delta^2}{E^2}}$

Bei Übergang E nach E'

gilt $E = \sqrt{k^2 + \Delta^2} \rightarrow$ gleiches E für k und $-k$

$\Rightarrow$ nach Summation über beide Möglichkeiten

$$M(E, E') \rightarrow B_{k k'} (1 \mp 1)$$

D. h. das Matrix element
ist null für einen der
beiden Prozesse

Aufgabe 1c) Goldene Regel:

$$\alpha_S = \int \cancel{V(E)} F(E, E + \hbar\omega) N_S(E) N_S(E + \hbar\omega) [f(E) - f(E + \hbar\omega)] dE$$

$$\text{aber } F(E, E + \hbar\omega) = \sum_{\substack{\hbar\epsilon E, \hbar\epsilon' E + \hbar\omega}} M_{\hbar\epsilon\hbar\epsilon'}$$

unter der annahme dass $B_{\hbar\epsilon\hbar\epsilon'} \approx B$

$$\Rightarrow \alpha_S = B^2 V(0)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{|E(E + \hbar\omega) \mp \Delta^2| (f(E) - f(E + \hbar\omega))}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} ((E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2)^{1/2}} \\ \times g(E) g(E + \hbar\omega)$$

$$\frac{\alpha_S}{\alpha_n} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dE$$

$$g(E) = \begin{cases} 1 & |E| > \Delta \\ 0 & |E| < \Delta \end{cases}$$

$$\alpha_n = B^2 V(0)^2 \hbar\omega$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_S}{\alpha_n} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{|E(E + \hbar\omega) \mp \Delta^2| (f(E) - f(E + \hbar\omega))}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} ((E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2)^{1/2}} \\ \times g(E) g(E + \hbar\omega)$$

Aufgabe 1d)

$$\lim_{\hbar\omega \rightarrow 0} \frac{|E(E+\hbar\omega) - \Delta^2| (f(E) - f(E+\hbar\omega))}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} |(E+\hbar\omega)^2 - \Delta^2|^{1/2}}$$

$$= \lim_{\hbar\omega \rightarrow 0} [f(E) - f(E+\hbar\omega)]$$

$$\frac{\alpha_S}{\alpha_n} = \lim_{\hbar\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dE [f(E) - f(E+\hbar\omega)] g(E) / g(E+\hbar\omega)$$

$$= - \int dE \frac{df}{dE} g^2(E)$$

$$= f(-\infty) - f(-\Delta) + f(\Delta) - f(\infty)$$

$$= 2f(\Delta) = \frac{2}{1 + e^{\Delta/\hbar T}}$$