Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie WS 13/14

Prof. Dr. G. Schön — **Lösungsvorschlag zu Blatt 3**

Dr. M. Marthaler — **18.11.2013**

---

1. Elektron-Phonon-Streuung:

(a) Zunächst müssen die Matrixelemente

$$\langle n_{\mathbf{p}\sigma}=0, n_{\mathbf{p}'\sigma}=1, n_{\mathbf{q}}\mp 1|H_{el-ph}|n_{\mathbf{p}\sigma}=1, n_{\mathbf{p}'\sigma}=0, n_{\mathbf{q}}\rangle\,,$$

für

$$H_{el-ph}=\sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},\sigma,\lambda} g_{\mathbf{q}}^{el-ph} c^{\dagger}_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\sigma}c_{\mathbf{p},\sigma}(a_{\mathbf{q}}+a^{\dagger}_{-\mathbf{q}})$$

berechnet werden.
Ruft man sich in Erinnerung

$$\begin{aligned}
c_{p,\sigma}\,|n_{p,\sigma'}\!=\!1\rangle &= (-1)^{\sum_{j<p} n_j}\,|n_{p,\sigma}\!=\!0\rangle \qquad & c_{p,\sigma}\,|n_{p,\sigma}\!=\!0\rangle &= 0\\
c^{\dagger}_{p,\sigma}\,|n_{p,\sigma}\!=\!0\rangle &= (-1)^{\sum_{j<p} n_j}\,|n_{p,\sigma}\!=\!1\rangle \qquad & c^{\dagger}_{p,\sigma}\,|n_{p,\sigma}\!=\!1\rangle &= 0\\
a_q\,|n_q\rangle &= \sqrt{n_q}\,|n_q\!-\!1\rangle & a^{\dagger}_q\,|n_q\rangle &= \sqrt{n_q\!+\!1}\,|n_q\!+\!1\rangle
\end{aligned}$$

erhält man direkt

$$\begin{aligned}
&\langle n_{\mathbf{p}\sigma}=0, n_{\mathbf{p}'\sigma}=1, n_{\mathbf{q}}\mp 1|H_{el-ph}|n_{\mathbf{p}\sigma}=1, n_{\mathbf{p}'\sigma}=0, n_{\mathbf{q}}\rangle\\
&=\sum_{\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{q}},\sigma'} g_{\bar{\mathbf{q}}}^{el-ph}\,\langle n_{\mathbf{p}\sigma}=0, n_{\mathbf{p}'\sigma}=1, n_{\mathbf{q}}\mp 1|c^{\dagger}_{\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{q}},\sigma'}c_{\bar{\mathbf{p}},\sigma'}(a_{\bar{\mathbf{q}}}+a^{\dagger}_{-\bar{\mathbf{q}}})|n_{\mathbf{p}\sigma}=1, n_{\mathbf{p}'\sigma}=0, n_{\mathbf{q}}\rangle\\
&=(-1)^{\nu}\sum_{\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{q}},\sigma'} g_{\bar{\mathbf{q}}}^{el-ph}\,\langle n_{\mathbf{q}}\mp 1|(a_{\bar{\mathbf{q}}}+a^{\dagger}_{-\bar{\mathbf{q}}})|n_{\mathbf{q}}\rangle\,\delta_{\mathbf{p},\bar{\mathbf{p}}}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{q}},\mathbf{p}'}\\
&=(-1)^{\nu}\sum_{\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{q}},\sigma'} g_{\bar{\mathbf{q}}}^{el-ph}\delta_{\mathbf{p},\bar{\mathbf{p}}}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{q}},\mathbf{p}'}\delta_{\pm\mathbf{q},\bar{\mathbf{q}}}x_{\mathbf{q},\pm}
\end{aligned}$$

mit der Definition $x_{\mathbf{q},+}=\sqrt{n_{\mathbf{q}}}$, $x_{\mathbf{q},-}=\sqrt{n_{\mathbf{q}}+1}$ und einem irrelevanten Phasenfaktor $(-1)^{\nu}$. Damit ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
\ldots &= \sum_{\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{q}},\sigma'} g_{\bar{\mathbf{q}}}^{el-ph}\delta_{\mathbf{p},\bar{\mathbf{p}}}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{q}},\mathbf{p}'}\delta_{\pm\mathbf{q},\bar{\mathbf{q}}}x^{\pm}_{\mathbf{q}}\\
&= g_{\bar{\mathbf{q}}}^{el-ph}\delta_{\mathbf{p}\pm\mathbf{q},\mathbf{p}'}x_{\mathbf{q},\pm}
\end{aligned}$$

und damit für die Raten aus Goldener Regel

$$\begin{aligned}
W^{\pm}_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} &= \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{q}}\left|\langle n_{\mathbf{p}}=0, n_{\mathbf{p}'}=1, n_{\mathbf{q}}\mp 1|H_{el-ph}|n_{\mathbf{p}}=1, n_{\mathbf{p}'}=0, n_{\mathbf{q}}\rangle\right|^2\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'}-\varepsilon_{\mathbf{p}}\mp\hbar\omega_{\mathbf{q}})\\
&= \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{q}}|g_{\mathbf{q}}^{el-ph}|^2\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'}-\varepsilon_{\mathbf{p}}\mp\hbar\omega_{\mathbf{q}})\delta_{\mathbf{p}\pm\mathbf{q},\mathbf{p}'}x^2_{\mathbf{q},\pm}\\
&= |g^{el-ph}_{\pm\mathbf{p}'\mp\mathbf{p}}|^2\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'}-\varepsilon_{\mathbf{p}}\mp\hbar\omega_{\pm\mathbf{p}'\mp\mathbf{p}})x^2_{\pm\mathbf{p}'\mp\mathbf{p},\pm}
\end{aligned}$$

(b) Die Gesamtstreurate lautet wie angegeben

$$\tau_{\mathbf{p}\sigma}^{-1} = \sum_{\mathbf{p}'} \big(1 - f(\varepsilon_{\mathbf{p}'\sigma})\big)\big(W^{+}_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma} + W^{-}_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma}\big)\,.$$

Der Ausdruck ergibt sich durch eine Summe über alle Endzustände $(\mathbf{p}'\sigma)$ wobei die einzelnen Übergangsraten noch mit der Wahrscheinlichkeit das der jeweilige Endzustand unbesetzt ist gewichtet werden müssen. Hier wurde schon berücksichtigt, dass die Elektron-Phonon-Streuung spinerhaltend ist. Allgemein müssten die Raten $W^{\pm}_{\mathbf{p}\sigma\to\mathbf{p}'\sigma'}$ berechnet werden, und auch über den Spin der Endzustände σ' summiert werden.

(c)

$$\begin{aligned}\frac{W^{+}_{p\to p'}}{W^{-}_{p'\to p}} &= \frac{|g^{el-ph}_{+\mathbf{p}'-\mathbf{p}}|^2\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \hbar\omega_{+\mathbf{p}'-\mathbf{p}})x^2_{+\mathbf{p}'-\mathbf{p},+}}{|g^{el-ph}_{-\mathbf{p}+\mathbf{p}'}|^2\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} + \hbar\omega_{-\mathbf{p}+\mathbf{p}'})x^2_{-\mathbf{p}+\mathbf{p}',-}} \\ &= \frac{x^2_{+\mathbf{p}'-\mathbf{p},+}}{x^2_{-\mathbf{p}+\mathbf{p}',-}} = \left(\frac{1}{e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}'}-\varepsilon_{\mathbf{p}})\beta} - 1}\right)\left(\frac{e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}'}-\varepsilon_{\mathbf{p}})}}{e^{(\varepsilon_{\mathbf{p}'}-\varepsilon_{\mathbf{p}})\beta} - 1}\right)^{-1} = \exp(-\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{p}}}{kT})\end{aligned}$$

Das Verhältnis der Übergangsraten erfüllt also die Bedingung des detaillierten Gleichgewichts.

(d) Wir setzen nun die Ergebnisse für $W^{\pm}$ und die gegebene Kopplungskonstante $g^{el-ph}_{\mathbf{q},\lambda} = g_0$ in den Ausdruck für die Gesamtstreurate ein, und schreiben die Impulssummen in Integrale um. $(\hbar = 1)$

$$\begin{aligned}&\tau_{\mathbf{p},\sigma}^{-1} = 2\pi g_0^2 \int \frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\big[1 - f(\varepsilon_{\mathbf{p}'\sigma})\big] \\ &\times\Big(n_{\mathrm{B}}(\omega_{\mathbf{q}})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'+\mathbf{q})\delta(\epsilon_{\mathbf{p}'}-\epsilon_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{q}}) + \big(n_{\mathrm{B}}(\omega_{\mathbf{q}})+1\big)\delta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\epsilon_{\mathbf{p}'}-\omega_{\mathbf{q}})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{q})\Big)\end{aligned}$$

Wie in der Vorlesung diskutiert integrieren wir nun über die Elektronen und Phononen Energien

$$\begin{aligned}\tau_{\mathbf{p},\sigma}^{-1} &= \mathrm{const}\int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon)\int_0^{\omega_D} d\omega F(\omega)\big[1 - f(\epsilon)\big] && (1)\\ &\quad\times(n_{\mathrm{B}}(\omega)\delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{p}} - \omega) + \big(n_{\mathrm{B}}(\omega) + 1\big)\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon - \omega) && (2)\end{aligned}$$

Nun verschieben wir die Energien der Elektronen, $\epsilon \to \epsilon + \epsilon_F$. Dementsprechend ändern wir die Definition der Fermifunktion zu $f(\epsilon) = 1/(\exp(\beta\epsilon) + 1)$. Ausserdem nehmen an das die Zustandsdichte konstant ist um die Fermikante:

$$\begin{aligned}\tau_{\mathbf{p},\sigma}^{-1} &= \mathrm{const}\int_{-\infty}^\infty d\epsilon\int_0^{\omega_D} d\omega F(\omega)\big[1 - f(\epsilon)\big] && (3)\\ &\quad\times(n_{\mathrm{B}}(\omega)\delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{p}} - \omega) + \big(n_{\mathrm{B}}(\omega) + 1\big)\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon - \omega)) && (4)\end{aligned}$$

Nun führen wir das Integral über die Elektronenenergien aus.

$$\begin{aligned}\tau_{\mathbf{p},\sigma}^{-1} &= \mathrm{const}\int_0^{\omega_D} d\omega F(\omega) && (5)\\ &\quad\times(\big[1 - f(\epsilon_{\mathbf{p}} + \omega)\big]n_{\mathrm{B}}(\omega) + \big[1 - f(\epsilon_{\mathbf{p}} - \omega)\big]\big(n_{\mathrm{B}}(\omega) + 1\big)) && (6)\end{aligned}$$

Nun stellen wir fest dass $n_\mathrm{B}(\omega)$ divergiert für $\omega \to 0$ aber $\omega^2 n_\mathrm{B}(\omega) \to 0$ für $\omega \to 0$. Damit können wir die Gleichung für T=0 simplifizieren,

$$\begin{aligned} \tau^{-1}_{\mathbf{p},\sigma} &= \text{const} \int_0^{\omega_D} d\omega\omega^2 \big[1 - f(\epsilon_\mathbf{p} - \omega)\big] && (7) \\ &= \text{const} \int_0^{\omega_D} d\omega\omega^2 \Theta(\epsilon_\mathbf{p} - \omega) && (8) \end{aligned}$$

Nun wählen wir $0 < \epsilon_\mathbf{p} < \omega_D$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \tau^{-1}_{\mathbf{p},\sigma} &= \text{const} \int_0^{\omega_D} d\omega\omega^2 \Theta(\epsilon_\mathbf{p} - \omega) && (9) \\ &= \text{const} \int_0^{\epsilon_\mathbf{p}} d\omega\omega^2 \propto (\epsilon_\mathbf{p})^3 && (10) \end{aligned}$$

Für $\epsilon_\mathbf{p} < 0$ bekommen wir $\tau^{-1}_{\mathbf{p},\sigma} = 0$ und für $\epsilon_\mathbf{p} > \omega_D$ folgt $\tau^{-1}_{\mathbf{p},\sigma} \propto \omega_D^3$.
Setzen wir nun $\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{F}$:

$$\begin{aligned} \tau^{-1}_{\varepsilon_\mathrm{F}}(T) &\propto \int_0^{\omega_D} \mathrm{d}\omega\, \omega^2 \left(1 - \frac{1}{e^{\beta\omega}+1}\right)\left(\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}\right) + \left(1 - \frac{1}{e^{-\beta\omega}+1}\right)\left(\frac{1}{e^{\beta\omega}-1} + 1\right) \\ &= \int_0^{\omega_D} \mathrm{d}\omega\, \frac{\omega^2}{\sinh(\omega)} = T^3 \int_0^{\frac{\omega_D}{kT}} \mathrm{d}x \frac{x^2}{\sinh(x)} \end{aligned}$$

Da wir $\frac{\omega_D}{kT} \gg 1$ betrachten und der Integrand exponental konvergiert sieht man, dass das Integral nur schwach mit der (temperaturabhängigen) oberen Grenze variiert.

2. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (xx)

Für einen Fermionischen Vielteilchenzustand sind die Erzeugungs und Vernichtungs-operatoren definiert durch,

$$
\begin{aligned}
c_\lambda^\dagger|n_1,\ldots,n_\lambda=0,\ldots\rangle &= (-1)^{\sum_{\nu<\lambda}n_\nu}|n_1,\ldots,n_\lambda=1,\ldots\rangle && (11)\\
c_\lambda|n_1,\ldots,n_\lambda=1,\ldots\rangle &= (-1)^{\sum_{\nu<\lambda}n_\nu}|n_1,\ldots,n_\lambda=0,\ldots\rangle && (12)\\
c_\lambda^\dagger|n_1,\ldots,n_\lambda=1,\ldots\rangle &= c_\lambda|n_1,\ldots,n_\lambda=0,\ldots\rangle = 0 && (13)
\end{aligned}
$$

Zeigen sie damit, dass die die Operatoren c_λ und $c_\lambda^\dagger$ die Antivertauschungsrelation

$$\{c_\lambda, c_{\lambda'}^\dagger\} = \delta_{\lambda,\lambda'} \tag{14}$$

erfüllen:

Wir beginnen damit den Antikommutator auf einen Zustand $|\psi\rangle$ anzuwenden.

$$
\begin{aligned}
\{c_\lambda, c_{\lambda'}^\dagger\}|\psi\rangle &= \left(c_\lambda^\dagger c_{\lambda'} + c_\lambda c_{\lambda'}^\dagger\right)|\psi\rangle = c_{\lambda'}^\dagger c_\lambda|\psi\rangle + c_\lambda c_{\lambda'}^\dagger|\psi\rangle \\
&= c_{\lambda'}^\dagger \delta_{n_\lambda,1}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda}n_\nu}|\psi^\lambda_{n_\lambda=0}\rangle + c_\lambda\delta_{n_{\lambda'},0}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'}n_\nu}|\psi^{\lambda'}_{n_{\lambda'}=1}\rangle && (15)
\end{aligned}
$$

Hier verwende ich die Notation $|\psi^\lambda_{n_\lambda=1(0)}\rangle$. Dies bedeutet das der Zustand n_λ bestezt (unbesetzt) ist.

$$
\begin{aligned}
\{c_\lambda, c_{\lambda'}^\dagger\}|\psi\rangle &= c_{\lambda'}^\dagger \delta_{n_\lambda,1}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda}n_\nu}|\psi^\lambda_{n_\lambda=0}\rangle + c_\lambda\delta_{n_{\lambda'},0}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'}n_\nu}|\psi^{\lambda'}_{n_{\lambda'}=1}\rangle && (16)\\
&= \delta_{n_{\lambda'},0}(-1)^{\sum_{\nu^\lambda<\lambda'}n'_\nu}\delta_{n_\lambda,1}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda}n_\nu}|\psi_{n_\lambda=0,n_{\lambda'}=1}\rangle && (17)\\
&\quad+\delta_{n_\lambda,1}(-1)^{\sum_{\nu^{\lambda'}<\lambda}n'_\nu}\delta_{n_{\lambda'},0}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'}n_\nu}|\psi_{n_{\lambda'}=1,n_\lambda=0}\rangle && (18)\\
& && (19)
\end{aligned}
$$

Hier bedeutet ν^λ bzw. $\nu^{\lambda'}$ das jeweils über die Konfiguration summiert wird nachdem ein Teilchen in Zustand n_λ ($n_{\lambda'}$) erzeugt (vernichtet) wurde.

Wir betrachten nun den Fall $\lambda > \lambda'$. Damit gilt $(-1)^{\sum_{\nu^\lambda<\lambda'}n'_\nu} = (-1)^{\sum_{\nu<\lambda'}n'_\nu}$. Damit lässt sich schreiben,

$$
\begin{aligned}
(-1)^{\sum_{\nu^\lambda<\lambda'}n'_\nu}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda}n_\nu} &= (-1)^{\sum_{\nu<\lambda'}n'_\nu}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'}n_\nu}(-1)^{\sum_{\lambda'\le\nu<\lambda}n_\nu} && (20)\\
&= (-1)^{\sum_{\lambda'\le\nu<\lambda}n_\nu} && (21)\\
(-1)^{\sum_{\nu^{\lambda'}<\lambda}n'_\nu}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'}n_\nu} &= (-1)^{\sum_{\nu^{\lambda'}<\lambda'}n'_\nu}(-1)^{\sum_{\lambda'\le\nu^{\lambda'}<\lambda}n'_\nu}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'}n_\nu} && (22)\\
&= (-1)^{\sum_{\nu<\lambda'}n'_\nu}(-1)^{\sum_{\lambda'<\nu^{\lambda'}<\lambda}n'_\nu}(-1)^{\sum_{\nu<\lambda'}n_\nu} && (23)\\
&= (-1)^{\sum_{\lambda'<\nu^{\lambda'}<\lambda}n'_\nu} && (24)
\end{aligned}
$$

Wenn wir nun die Summen über ν und $\nu^{\lambda'}$ vergleichen ist der unterschied dadurch gegeben das für die Summe über $\nu^{\lambda'}$ gilt $n_{\lambda'}=1$ anstat $n_{\lambda'}=0$ anstat. Damit ergibt sich

$$\sum_{\lambda'<\nu^{\lambda'}<\lambda} n_{\nu^{\lambda'}} = \sum_{\lambda'<\nu<\lambda} n_\nu + 1 \tag{25}$$

Es ist damit leicht zu sehen das

$$\{c_\lambda, c_{\lambda'}^\dagger\} = 0 \tag{26}$$

für $\lambda > \lambda'$. Genauso lässt sich für alle anderen fälle Argumentieren.

3. Magnetische Störstelle

Hiweis: Wir benutzen nun für diese Aufgabe durchgehend den Wellenvektor $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$. Wir betrachten nun die Streuung von Elektronen an einer Magnetischen Störstelle. Die Magnetische Störstelle befindet sich am Urpsrung des Koordinatensystems $\mathbf{r} = 0$. Die Störstelle hat einen Spin $\mathbf{S}$ und koppelt an die Spins $\mathbf{s}$ der Elektronen des Leitungsbandes. Dies kann durch folgenden Hamiltonian beschrieben werden,

$$H_K = -J\mathbf{S}\cdot\mathbf{s}\,\delta(\mathbf{r})\,. \tag{27}$$

Hierbei soll immer angenommen werden das $\mathbf{S}$ bei einer Streuung sich nicht verändert.

(a) Schreiben die den Hamiltonian (27) in der Form der 2ten Quantisierung in der Basis der ebenen Wellen:
Wir betrachten einen Operator $\hat{V}$ der Form $\hat{V} = \int \mathrm{d}^3x\, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})V(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x})$. Dabei sind $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})$ und $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ fermionische Feldoperatoren. Der Operator $\hat{V}$ soll nun in zweiter Quantisierung durch die Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}}$ und $\hat{c}_{\mathbf{k}}$ im Impulsraum ($\langle\mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\exp(i\mathbf{kx})$), bzw. durch ebene Wellen ausgedrückt werden. Allgemein für spinlose Fermionen:

$$\begin{aligned}\hat{V} &= \int \mathrm{d}x\, \hat{\psi}^\dagger(x)V(x)\hat{\psi}(x) = \int \mathrm{d}x \sum_{\mu,\mu'} \langle x|\mu\rangle^*\, \hat{c}^\dagger_\mu V(x)\, \langle x|\mu'\rangle\, \hat{c}_{\mu'} \\ &= \sum_{\mu,\mu'} \hat{c}^\dagger_\mu \hat{c}_{\mu'} \int \mathrm{d}x\, \langle x|\mu\rangle^*\, \langle x|\mu'\rangle\, V(x)\end{aligned}$$

und explizit für ebene Wellen in drei Dimensionen ($\mu = \mathbf{k}$) mit $\langle\mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\exp(i\mathbf{kx})$:

$$\hat{V} = \frac{1}{\Omega}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}'} \int \mathrm{d}^3x e^{-i\mathbf{kx}/\hbar} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}/\hbar} V(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}'} V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

Wenn wir nun den Spin-Freiheitsgrad mit einbeziehen wollen könen wir die folgenden Vektor definieren (wie schon auf dem Übungsblatt erwähnt)

$$\vec{c}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k},\uparrow} \\ c_{\mathbf{k},\downarrow} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Damit lässt sich schreiben

$$\begin{aligned}\vec{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}\mathbf{S}\cdot\mathbf{s}\vec{c}_{\mathbf{k}} &= \vec{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}S_-s_+\vec{c}_{\mathbf{k}} + \vec{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}S_+s_-\vec{c}_{\mathbf{k}} + \vec{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}S_zs_z\vec{c}_{\mathbf{k}} \qquad (29)\\ &= \frac{\hbar}{2}S_-\vec{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{c}_{\mathbf{k}'} + \frac{\hbar}{2}S_+\vec{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \vec{c}_{\mathbf{k}}\frac{\hbar}{2}S_z\vec{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{c}_{\mathbf{k}} \\ &= \frac{\hbar}{2}S_-c^\dagger_{\mathbf{k}'\uparrow}c_{\mathbf{k}\downarrow} + \frac{\hbar}{2}S_+c^\dagger_{\mathbf{k}'\downarrow}c_{\mathbf{k}\uparrow} + \frac{\hbar}{2}S_z\left[c^\dagger_{\mathbf{k}'\uparrow}c_{\mathbf{k}\uparrow} - c^\dagger_{\mathbf{k}'\downarrow}c_{\mathbf{k}\downarrow}\right]\end{aligned}$$

Die Fourier Transformation der δ-funktion ist trivial, und somit ergbt sich,

$$H_K = -\frac{J}{\Omega}\sum_{\mathbf{kk}'} \vec{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}\mathbf{S}\cdot\mathbf{s}\vec{c}_{\mathbf{k}} \tag{30}$$

(b) Wie muss die Lebensdauer modifiziert werden wenn wir eine Magnetische Störstelle betrachten?

$$\tau_{\mathbf{k}\sigma}^{-1} = \sum_{\mathbf{k}',\sigma'} \big(1 - f(\varepsilon_{\mathbf{k}'\sigma})\big) W_{\mathbf{k}\sigma\to\mathbf{k}'\sigma'} \tag{31}$$

Zusätzlich zur summation über die Wellenvektoren $\mathbf{k}$ muss noch über die Spins summiert werden.

(c) Berechnen sie nun die Streuraten $W_{\mathbf{k}\uparrow\to\mathbf{k}'\uparrow}$ und $W_{\mathbf{k}\uparrow\to\mathbf{k}'\downarrow}$.

- Berechnung von$W_{\mathbf{k}\uparrow\to\mathbf{k}'\uparrow}$:
  Wir betrachten zuerst das relevante Matrixelement

$$\langle n_{\mathbf{k},\uparrow} = 0, n_{\mathbf{k}',\uparrow} = 1 | H_K | n_{\mathbf{k},\uparrow} = 1, n_{\mathbf{k}',\uparrow} = 0\rangle = \frac{JS_z}{\Omega} \tag{32}$$

  Nach der Goldenen Regel ergibt sich dann die Übergangsrate,

$$W_{\mathbf{k}\uparrow\to\mathbf{k}'\uparrow} = \left(\frac{JS_z}{\Omega}\right)^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{k},\uparrow} - \epsilon_{\mathbf{k}',\uparrow}) \tag{33}$$

- Berechnung von$W_{\mathbf{k}\uparrow\to\mathbf{k}'\downarrow}$:
  Wir betrachten zuerst das relevante Matrixelement

$$\langle n_{\mathbf{k},\uparrow} = 0, n_{\mathbf{k}',\downarrow} = 1 | H_K | n_{\mathbf{k},\uparrow} = 1, n_{\mathbf{k}',\downarrow} = 0\rangle = \frac{JS_+}{\Omega} \tag{34}$$

  Nach der Goldenen Regel ergibt sich dann die Übergangsrate,

$$W_{\mathbf{k}\uparrow\to\mathbf{k}'\downarrow} = \left|\frac{JS_+}{\Omega}\right|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{k},\uparrow} - \epsilon_{\mathbf{k}',\downarrow}) \tag{35}$$

(d) Finden sie eine explizite Form für die Lebensdauer $\tau_{\mathbf{p}\uparrow}^{-1}$ für die Temperatur $T = 0$:

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{k}\uparrow}^{-1} &= \sum_{\mathbf{k}'} \big(1 - f(\varepsilon_{\mathbf{k}',\uparrow})\big) W_{\mathbf{k}\uparrow\to\mathbf{k}'\uparrow} + \sum_{\mathbf{k}'} \big(1 - f(\varepsilon_{\mathbf{k}',\downarrow})\big) W_{\mathbf{k}\uparrow\to\mathbf{k}'\downarrow} && (36) \\ &= \frac{J^2\hbar^2(S_z^2 + |S_+|^2)}{4\Omega(2\pi)^3} \int d^3k' \Theta(\hbar^2\mathbf{k}'^2/2m - \epsilon_F)\delta\left[\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} - \frac{\hbar^2\mathbf{k}'^2}{2m}\right] && (37) \end{aligned}$$

Wir definieren nun die Energie $\epsilon = \hbar^2\mathbf{k}^2/2m$ und führen die Zustandsdichte $D(\epsilon)$ ein die auf dem ersten Übungsblatt in der Aufgabe 2 diskutiert wurde. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{k}\uparrow}^{-1} &= \frac{J^2\hbar^2(S_z^2 + |S_+|^2)}{4\Omega(2\pi)^3} \int_{\epsilon_F}^{\infty} d\epsilon' D(\epsilon')\delta(\epsilon - \epsilon') && (38) \\ &= \begin{cases} \frac{J^2\hbar^2(S_z^2+|S_+|^2)}{4\Omega(2\pi)^3} D(\epsilon) & \text{for } \epsilon > \epsilon_F \\ 0 & \text{for } \epsilon < \epsilon_F \end{cases} && (39) \end{aligned}$$