KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE | INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie WS 13/14

Prof. Dr. G. Schön
Dr. M. Marthaler

Lösungsvorschlag zu Blatt 5
02.12.2013

---

1. Elektron-Phonon Streuung (20 Punkte)

Wir betrachten die Boltzmangleichung für ein Elektronengas unter Einfluss eines angelegten elektrischen Feldes $\mathbf{E}$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} + e\mathbf{E}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\right) f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} \tag{1}$$

Das Stoßintegral soll für Elektron-Phonon Streuung ausgewertet werden. Für die Berechnung des Stoßintegrals spielt die Ortsabhängigkeit keine Rolle und wir verwenden die Notation $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = f(\epsilon_{\mathbf{p}})$. Mit den Raten $W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} = W^+_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} + W^-_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'}$ die auf Aufgabenblatt 3 berechnet wurden, lässt sich das Stoßintegral schreiben als

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} = \sum_{\mathbf{p}'} \left[W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} f(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f(\epsilon_{\mathbf{p}})) - W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} f(\epsilon_{\mathbf{p}})(1-f(\epsilon_{\mathbf{p}'}))\right] \tag{2}$$

für die Verteilungsfunktion $f(\epsilon_{\mathbf{p}})$ verwenden wir wie in der Vorlesung den Ansatz,

$$f(\epsilon_{\mathbf{p}}) = f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}) + \delta f(\epsilon_{\mathbf{p}})\,. \tag{3}$$

Hierbei ist $f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}})$ die Verteilungsfunktion im lokalen Gleichgewicht, und $\delta f(\epsilon_{\mathbf{p}})$ ist eine kleine Störung.

(a) Wir betrachten Übergänge von besetzten Zuständen $f(\epsilon_{\mathbf{p}})$ zu unbesetzten Zuständen $(1-f(\epsilon'_{\mathbf{p}}))$.

(b) (Extra) Wir zeigen nun, dass gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} = 0 \tag{4}$$

für eine Verteilungsfunktion im lokalen Gleichgewicht.

$$\frac{W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'}}{W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}}} = \frac{W^+_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} + W^-_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'}}{W^+_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} + W^-_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}}} \tag{5}$$

$$= \frac{W^+_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} + W^-_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'}}{e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\epsilon_{\mathbf{p}'})} W^-_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} + e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\epsilon_{\mathbf{p}'})} W^+_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'}} = e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\epsilon_{\mathbf{p}'})} \tag{6}$$

$$f(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f(\epsilon_{\mathbf{p}})) = f(\epsilon_{\mathbf{p}'})f(-\epsilon_{\mathbf{p}}) = f(\epsilon_{\mathbf{p}'})f(\epsilon_{\mathbf{p}})e^{\beta\epsilon_{\mathbf{p}}} \tag{7}$$

Damit

$$W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} f(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f(\epsilon_{\mathbf{p}})) = e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\epsilon_{\mathbf{p}'})} W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} f(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f(\epsilon_{\mathbf{p}})) \tag{8}$$

$$= e^{\beta\epsilon_{\mathbf{p}'}} W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} f(\epsilon_{\mathbf{p}'})f(\epsilon_{\mathbf{p}}) \tag{9}$$

$$= W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'}(1-f(\epsilon_{\mathbf{p}'}))f(\epsilon_{\mathbf{p}}) \tag{10}$$

(c) Wir linearisieren das Stoßintegral,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} = \sum_{\mathbf{p}'} \Big[W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}}(\delta f(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}})) - f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'})\delta f(\epsilon_{\mathbf{p}})) \tag{11}$$

$$- W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'}(\delta f(\epsilon_{\mathbf{p}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'})) - f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}})\delta f(\epsilon_{\mathbf{p}'}))\Big] \tag{12}$$

Wir verwenden nun, ähnlich wie in der Vorlesung diskutiert (siehe Skript Seite III-7),

$$\delta f(\epsilon_{\mathbf{p}}) = \left(-\frac{\partial f^{\text{l.e.}}}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}\right)\varphi(\mathbf{p}) = \frac{f^{\text{l.e.}}(1-f^{\text{l.e.}})}{k_B T}\varphi(\mathbf{p}) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} &= \sum_{\mathbf{p}'}\Big[\frac{W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}}}{k_B T}(f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'}))(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}))\varphi(\mathbf{p}') - f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'})f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'}))\varphi(\mathbf{p})) \\
&\quad - \frac{W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'}}{k_B T}(f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}))(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'}))\varphi(\mathbf{p}) - f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}})f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'}))\varphi(\mathbf{p}'))\Big] \\
&= \sum_{\mathbf{p}} \frac{W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}))}{k_B T}(\varphi(\mathbf{p}')-\varphi(\mathbf{p})) \qquad (14)
\end{aligned}$$

(d) Wir zeigen nun, dass wenn wir die expliziten Raten $W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}}$ einsetzen, das Stoßintegral nur noch von $\varphi(\mathbf{p}+\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{p})n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})$ abhängt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}))}{k_B T}(\varphi(\mathbf{p}')-\varphi(\mathbf{p})) \qquad (15) \\
&= \frac{2\pi}{\hbar k_B T}\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}'}\sum_{\pm} |g^{el-ph}_{\mathbf{q},\lambda}|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'} \mp \hbar\omega_{\mathbf{q}})\delta_{\mathbf{p}'\pm\mathbf{q},\mathbf{p}} x^2_{\mathbf{q},\pm} f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}))(\varphi(\mathbf{p}')-\varphi(\mathbf{p}))
\end{aligned}$$

mit $x^+_{\mathbf{q}} = \sqrt{n_{\mathbf{q}}}$, $x^-_{\mathbf{q}} = \sqrt{n_{\mathbf{q}}+1}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} &= \frac{2\pi}{\hbar k_B T}\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}'}\Big[|g^{el-ph}_{\mathbf{q}}|^2\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'} - \hbar\omega_{\mathbf{q}})\delta_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\mathbf{p}} n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}}) \qquad (16) \\
&\quad + |g^{el-ph}_{\mathbf{q}}|^2\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'} + \hbar\omega_{\mathbf{q}})\delta_{\mathbf{p}'-\mathbf{q},\mathbf{p}}(n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})+1)\Big] f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}))(\varphi(\mathbf{p}')-\varphi(\mathbf{p})) \\
&= \frac{2\pi}{\hbar k_B T}\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}'}\Big[|g^{el-ph}_{-\mathbf{q}}|^2\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'} - \hbar\omega_{-\mathbf{q}})\delta_{\mathbf{p}'-\mathbf{q},\mathbf{p}} n_B(\hbar\omega_{-\mathbf{q}}) \qquad (17) \\
&\quad + |g^{el-ph}_{\mathbf{q}}|^2\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'} + \hbar\omega_{\mathbf{q}})\delta_{\mathbf{p}'-\mathbf{q},\mathbf{p}}(n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})+1)\Big] f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}))(\varphi(\mathbf{p}')-\varphi(\mathbf{p})) \\
&= \frac{2\pi}{\hbar k_B T}\sum_{\mathbf{q}} n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})|g^{el-ph}_{\mathbf{q}}|^2\Big[\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}) f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}})) \\
&\quad + \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}) f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}))\Big](\varphi(\mathbf{p}+\mathbf{q})-\varphi(\mathbf{p})) \\
&\qquad (18)
\end{aligned}$$

Wobei ich im letzten Schritt den hinweis,

$$f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}))(n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})+1)\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}) \tag{19}$$

$$= f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}))n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}) \tag{20}$$

verwendet habe.

(e) Im weiteren gehen wir davon aus, dass die Elektronenimpulse $\mathbf{p}$ deutlich grösser sind als die Phononenimpulse $\mathbf{q}$. Nähern sie nun das Stoßintegral weiter, indem sie verwenden $\varphi(\mathbf{p}) = \eta(\epsilon_\mathbf{p})\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$, wobei sie annehmen können, dass $\eta(\epsilon_\mathbf{p})$ nur schwach energieabhängig ist, $\eta(\epsilon_\mathbf{p}) \approx \eta(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})$.
Damit ergibt sich,

$$(\varphi(\mathbf{p}+\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{p})) \approx \eta\mathbf{q}\cdot\mathbf{E} \tag{21}$$

und somit

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} &= \frac{2\pi\eta}{\hbar k_B T}\sum_\mathbf{q} n_B(\hbar\omega_\mathbf{q})|g_\mathbf{q}^{el-ph}|^2\Big[\delta(\epsilon_\mathbf{p}-\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}-\hbar\omega_\mathbf{q})f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p}))\\ &\quad +\delta(\epsilon_\mathbf{p}-\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}+\hbar\omega_\mathbf{q})f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}))\Big]\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{E}\end{aligned} \tag{22}$$

Bzw,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} &= \frac{2\pi\eta}{\hbar k_B T}\sum_\mathbf{q} n_B(\hbar\omega_\mathbf{q})|g_\mathbf{q}^{el-ph}|^2\Big[\delta(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}-\epsilon_\mathbf{p}+\hbar\omega_\mathbf{q})f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p}))\\ &\quad +\delta(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}-\epsilon_\mathbf{p}-\hbar\omega_\mathbf{q})f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}))\Big]\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{E}\end{aligned} \tag{23}$$

(f) Wir führen nun die Winkelintegration aus, indem wir die Richtung des Vektors $\mathbf{p}$ als z-Richtung wählen und dann verwenden,

$$\delta(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}-\epsilon_\mathbf{p}\pm\omega_\mathbf{q}) = \frac{m}{pq}\delta(\cos\theta+\frac{q}{2p}\pm\frac{m\hbar\omega_\mathbf{q}}{pq})\,, \tag{24}$$

wobei θ der Winkel zwischen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ ist.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} &= \frac{2\pi\eta}{\hbar k_B T}V\int\frac{dqq^2}{(2\pi\hbar)^3}n_B(\hbar\omega_\mathbf{q})|g_\mathbf{q}^{el-ph}|^2\frac{m}{pq}\int_{-1}^{1}dz\int_0^{2\pi}d\phi\\ &\quad\Big[\delta(z+\frac{q}{2p}+\frac{m\hbar\omega_\mathbf{q}}{pq})f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p}))+\delta(z+\frac{q}{2p}-\frac{m\hbar\omega_\mathbf{q}}{pq})f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}))\Big]\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{E}\\ &= \frac{V\eta}{2\pi\hbar^4 k_B T}\frac{m}{p}\int dqqn_B(\hbar\omega_\mathbf{q})|g_\mathbf{q}^{el-ph}|^2\int_{-1}^{1}dz\\ &\quad\Big[\delta(z+\frac{q}{2p}+\frac{m\hbar\omega_\mathbf{q}}{pq})f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p}))+\delta(z+\frac{q}{2p}-\frac{m\hbar\omega_\mathbf{q}}{pq})f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}))\Big]\,qE_z z\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Energien:

$$\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{(\mathbf{p}+\mathbf{q})^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}+\frac{q^2}{2m}+\frac{qpz}{m} \tag{25}$$

Wir evaluieren die δ-Funktion bei,

$$z = -\frac{q}{2p}\mp\frac{m\hbar\omega_\mathbf{q}}{pq} \tag{26}$$

Damit

$$\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \frac{(\mathbf{p}+\mathbf{q})^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}\mp\hbar\omega_\mathbf{q} = \epsilon_\mathbf{p}\mp\hbar\omega_\mathbf{q} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} &= \frac{V\eta}{2\pi\hbar^4 k_B T}\frac{m}{p}\int dqqn_B(\hbar\omega_\mathbf{q})|g_\mathbf{q}^{el-ph}|^2\\ &\quad\Big[f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p}-\hbar\omega_\mathbf{q})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p}))\Big[-\frac{q}{2p}-\frac{m\hbar\omega_\mathbf{q}}{pq}\Big]+f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_\mathbf{p}+\hbar\omega_\mathbf{q}))\Big[-\frac{q}{2p}+\frac{m\hbar\omega_\mathbf{q}}{pq}\Big]\Big]\,qE_z\end{aligned}$$

(g) Wir entwickeln nun die Verteilungsfunktionen $f^{\text{l.e.}}$ für kleine Phononenenergien und benutzen dazu den Hinweis

$$f^{\text{l.e.}}(\epsilon)(1 - f^{\text{l.e.}}(\epsilon')) = (f^{\text{l.e.}}(\epsilon') - f^{\text{l.e.}}(\epsilon))n_B(\epsilon - \epsilon') \tag{28}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\right)_{\text{coll}} &= \frac{V\eta}{2\pi\hbar^4 k_B T} \frac{m}{p} \int dqqn_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})|g_{\mathbf{q}}^{el-ph}|^2 qE_z \\ &\left[(f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}) - f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}))n_B(-\hbar\omega_{\mathbf{q}}) \left[-\frac{q}{2p} - \frac{m\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{pq}\right] + (f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}) - f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}))n_B(-\hbar\omega_{\mathbf{q}}) \left[-\frac{q}{2p} + \frac{m\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{pq}\right]\right]\end{aligned}$$

Entwicklung der Phononennergien

$$f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}) - f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}) = \frac{\partial f^{\text{l.e.}}}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} \tag{29}$$

$$f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}) - f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}) = \frac{\partial f^{\text{l.e.}}}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} \tag{30}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\right)_{\text{coll}} = -\frac{V\eta E_z}{2\pi\hbar^4 k_B T} \frac{m}{p} \int dqq^2 n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})n_B(-\hbar\omega_{\mathbf{q}})|g_{\mathbf{q}}^{el-ph}|^2 \frac{q}{p} \frac{\partial f^{\text{l.e.}}}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} \hbar\omega_{\mathbf{q}}$$

Mit der Definition die auf dem Übungsblatt gegeben ist,

$$\delta f(\epsilon_{\mathbf{p}}) = \left(-\frac{\partial f^{\text{l.e.}}}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}\right) \eta \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \tag{31}$$

kann nun wieder geschrieben werden,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\right)_{\text{coll}} = \frac{\delta f(\epsilon_{\mathbf{p}})}{\tau^{\text{tr}}(\epsilon_{\mathbf{p}})} \tag{32}$$

mit

$$\frac{1}{\tau^{\text{tr}}(\epsilon_{\mathbf{p}})} = \frac{V}{2\pi\hbar^4 k_B T} \frac{m}{p^3} \int dqq^3 n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})n_B(-\hbar\omega_{\mathbf{q}})|g_{\mathbf{q}}^{el-ph}|^2 \hbar\omega_{\mathbf{q}} \tag{33}$$

(h) Wir berechnen nun die Temperaturabhängikeit von $1/\tau^{\text{tr}}(\epsilon_{\mathbf{p}})$ für niedrige Temperaturen ($k_B T \ll \hbar\omega_D$). Für die Kopplungskonstante verwenden wir dabei $g_{\mathbf{q}}^{el-ph} = g_0\sqrt{\omega_{\mathbf{q}}/\omega_D}$.

$$\frac{1}{\tau^{\text{tr}}(\epsilon_{\mathbf{p}})} = \frac{Vc^2}{2\pi\hbar^3 k_B T\omega_D} \frac{m}{p^3} \int dqq^5 n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})n_B(-\hbar\omega_{\mathbf{q}}) \tag{34}$$

$$= \frac{V}{2\pi\hbar^3 c^3 k_B T\omega_D} \frac{m}{p^3} \int_0^{\epsilon_D} d\epsilon\epsilon^5 n_B(\epsilon)n_B(-\epsilon) \tag{35}$$

$$= \frac{V}{2\pi\hbar^3 c^3 k_B T\omega_D} \frac{m}{p^3} (k_B T)^6 J_5(\epsilon_D/k_B T) \propto (k_B T)^5 \tag{36}$$

Argumentation wie auf Blatt 3.