Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie WS 13/14

Prof. Dr. G. Schön
Dr. M. Marthaler

Lösungsvorschlag zu Blatt 6
09.12.2013

---

1. **Störstellenstreuung** (3 Punkte)
   Wir betrachten eine Störstelle die an die Leitungselektronen koppelt. Die Störstelle wird beschrieben durch den Hamilton-Operator $H = V(\mathbf{r})$. In 2ter Quantisierung im Ortsraum lässt sich dies schreiben als $V = \int \mathrm{d}^3x\, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})V(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x})$, dabei sind $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})$ und $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ fermionische Feldoperatoren. Der Operator V soll nun in zweiter Quantisierung durch die Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $\hat{c}^\dagger_\mathbf{p}$ und $\hat{c}_\mathbf{p}$ im Impulsraum ($\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar)$) ausgedrückt werden. Allgemein:

$$V = \int \mathrm{d}x\, \hat{\psi}^\dagger(x)V_{\mathrm{imp}}(x)\hat{\psi}(x) = \int \mathrm{d}x \sum_{\mu,\mu'} \langle x|\mu\rangle^* \hat{c}^\dagger_\mu V(x) \langle x|\mu'\rangle \hat{c}_{\mu'}$$
$$= \sum_{\mu,\mu'} \hat{c}^\dagger_\mu \hat{c}_{\mu'} \int \mathrm{d}x\, \langle x|\mu\rangle^* \langle x|\mu'\rangle V(x)$$

und explizit für den Impulsraum und 3D ($\mu = \mathbf{p}$) mit $\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar)$:

$$V = \frac{1}{\Omega}\sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \hat{c}^\dagger_\mathbf{p}\hat{c}_{\mathbf{p}'} \int \mathrm{d}^3x e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}e^{i\mathbf{p}'\mathbf{x}/\hbar}V(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \hat{c}^\dagger_\mathbf{p}\hat{c}_{\mathbf{p}'}V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$$

Damit finden wir das Matrixelement,

$$\langle n_\mathbf{p} = 1, n_{\mathbf{p}'} = 0|H|n_\mathbf{p} = 0, n_{\mathbf{p}'} = 1\rangle = (-1)^\nu V(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{1}$$

Damit ist die Streurate für ein Elektronengas gegeben durch

$$W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} = |V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')|^2\delta(\epsilon_{\mathbf{p}'} - \epsilon_\mathbf{p}) \tag{2}$$

2. Elektronentransport im Diffusiven limit (5 Punkte)

Anmerkung: Wir verwenden hier eine vereinfachte Variante der Störstellenstreuung. Im Prinzip hat man viele Störstellen,

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_s} v(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \tag{3}$$

Damit ist die Rate dann gegeben durch,

$$W_{\mathbf{p}' \to \mathbf{p}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{V^2} \sum_{i,j} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)/\hbar} |V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{p}'} - \epsilon_{\mathbf{p}}) \tag{4}$$

Dann wird über die Positionen der Störstellen gemittelt und wir nehmen an. dass gilt,

$$\frac{1}{V^2} \langle \sum_{i,j} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)/\hbar} |V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \rangle \approx \frac{N_s}{V} v = v_0 \tag{5}$$

Wir betrachten die Boltzmangleichung für ein Elektronengas,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + e\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \right)_{\text{coll}} \tag{6}$$

Das Stoßintegral soll für Störstellenstreuung ausgewertet werden. Mit den Raten $W_{\mathbf{p} \to \mathbf{p}'}$ aus der vorhergehenden Aufgabe, lässt sich das Stoßintegral schreiben als

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \right)_{\text{coll}} = \sum_{\mathbf{p}'} \left[W_{\mathbf{p}' \to \mathbf{p}} f(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1 - f(\epsilon_{\mathbf{p}})) - W_{\mathbf{p} \to \mathbf{p}'} f(\epsilon_{\mathbf{p}})(1 - f(\epsilon_{\mathbf{p}'})) \right] \tag{7}$$

Für die Verteilungsfunktion $f(\epsilon_{\mathbf{p}})$ verwenden wir ähnlich wie in der Vorlesung den Ansatz,

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f^{\text{l.e.}}(\mathbf{r}, \epsilon_p, t) + \delta \mathbf{f}(\mathbf{r}, \epsilon_p, t) \cdot \hat{p}\,. \tag{8}$$

mit dem Einheitsvektor $\hat{p} = \mathbf{p}/p$. Hierbei ist $f^{\text{l.e.}}$ die Verteilungsfunktion im lokalen Gleichgewicht, und $\delta\mathbf{f}$ ist eine kleine Störung. Beide Verteilungsfunktionen hängen nun nicht mehr explizit von der Richtung von $\mathbf{p}$ ab.

(a) Wir nehmen nun an das $V(\mathbf{r}) = v_0 \delta(\mathbf{r})$, somit ist $W_{\mathbf{p}' \to \mathbf{p}} = W_{\mathbf{p} \to \mathbf{p}'}$. Damit gilt,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \right)_{\text{coll}} == \delta \mathbf{f}(\mathbf{r}, \epsilon_p, t) \cdot \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p} \to \mathbf{p}'} (\hat{p}' - \hat{p}) \tag{9}$$

Es gilt offensichtlich,

$$\sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p} \to \mathbf{p}'} \hat{p}' = \frac{2\pi}{\hbar} v_0 \sum_{\mathbf{p}'} \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'}) \hat{p}' = 0 \tag{10}$$

und damit
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} = -\frac{\delta\mathbf{f}(\mathbf{r},\epsilon_p,t)\cdot\hat{p}}{\tau}. \tag{11}$$
mit
$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} &= \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} = \frac{2\pi v_0}{\hbar}\int\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}\delta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\epsilon_{\mathbf{p}'}) &(12)\\ &= \frac{8\pi v_0}{\hbar}D(\epsilon_p) &(13)\end{aligned}$$

(b) Wir integrieren nun die über alle Richtungen von $\hat{p}$. Damit ergibt sich sofort
$$\frac{1}{4\pi}\int d\Omega\partial_t f^{\text{l.e.}} = \partial_t f^{\text{l.e.}} \tag{14}$$
und
$$\frac{1}{4\pi}\int d\Omega\delta\mathbf{f}\cdot\hat{p} = 0 \tag{15}$$
und
$$\frac{1}{4\pi}\int d\Omega\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f^{\text{l.e.}} = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f^{\text{l.e.}} = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega v(p)\hat{p}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f^{\text{l.e.}} = 0 \tag{16}$$
Jetzt der letzte relevante Term,
$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\delta\mathbf{f}\cdot\hat{p} &= (v_x\partial_x + v_y\partial_y + v_z\partial_z)\delta f_z\cos(\theta) &(17)\\ &= (v\cos\phi\sin(\theta)\cos(\theta)\partial_x + v\sin\phi\sin(\theta)\cos(\theta)\partial_y + v\cos^2(\theta)\partial_z)\delta f_z\end{aligned}$$
und damit
$$\frac{1}{4\pi}\int d\Omega\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\delta\mathbf{f}\cdot\hat{p} = \frac{1}{3}v\nabla\cdot\delta\mathbf{f} \tag{18}$$
Damit ist gezeigt das sich ergibt,
$$\partial_t f^{\text{l.e.}} + \frac{1}{3}v\nabla\cdot\delta\mathbf{f} = 0 \tag{19}$$

(c) Wir mulitplizieren jetzt die Boltzmangleichung mit $\hat{p}$ und integrieren über alle Raumrichtungen. Alle Terme die eine ungerade Potenz von $\hat{p}$ enthalten Fallen weg. Mit den Gleichen Arguemnten wie oben ergibt sich dann,
$$\frac{1}{3}\left(v\nabla f^{\text{l.e.}} + \partial_t\delta\mathbf{f}\right) = -\frac{1}{3\tau}\delta\mathbf{f} \tag{20}$$
Wir nehmen nun an dass die Zeitableitung der Störung der Verteilungsfunktion $\partial_t\delta\mathbf{f}$ vernachlässigt werden kann. Kombinieren wir nun Gl. 20 mit Gl. 18 ergibt sich
$$\left(\partial_t - D\nabla^2\right)f^{\text{l.e.}}(\mathbf{r},\epsilon_p,t) = 0 \tag{21}$$
mit $D = v^2\tau/3$

3. **Tunnelstrom** (4 Punkte)

Wir betrachten einen Tunnelkontakt der durch den Tunnel-Hamilton-Operator,

$$H_T = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} t_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} c^\dagger_{\mathbf{p},R} c_{\mathbf{p}',L} + \text{h.c.} \tag{22}$$

beschrieben wird. Der Index L (R) beschreibt Elektronen auf der linken (rechten) Seite des Tunnelkontaktes. D.h. der Tunnel-Hamilton-Operator vernichtet z.B. ein Elektron mit Impuls $\mathbf{p}'$ auf der linken Seite des Tunnelkontaktes und erzeugt ein Elektron mit Impuls $\mathbf{p}$ auf der rechten Seite des Tunnelkontaktes.

(a) Die Tunnelraten von Links nach Rechtes sind gegeben durch,

$$W^{L\to R}_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} = \frac{2\pi}{\hbar} |t_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'}) \tag{23}$$

Dasergibt sich aus dem Matrix element,

$$\langle n_{\mathbf{p}} = 1, n_{\mathbf{p}'} = 0 | H_T | n_{\mathbf{p}} = 0, n_{\mathbf{p}'} = 1 \rangle = t_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \tag{24}$$

(b) Der Tunnelstrom von Links nach rechts ist gegeben durch

$$I_{L\to R} = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W^{L\to R}_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} f_L(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1 - f_R(\epsilon_{\mathbf{p}}))\,, \tag{25}$$

Hierbei summieren wir über alle möglichen Übergänge, von $\mathbf{p}'$ nach $\mathbf{p}$. Diese werden dann dementsprechen gewichtet durch die Wahrscheinlichkeit das der Zustand $\mathbf{p}'$ auf der linken Seite besetzt ist und das der Zustand $\mathbf{p}'$ auf der rechten Seite unbesetzt ist.

der Tunnelstrom von rechts nach links ist gegeben durch,

$$I_{R\to L} = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W^{R\to L}_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} f_R(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1 - f_L(\epsilon_{\mathbf{p}}))\,, \tag{26}$$

wobei man sofort sieht das die Tunnelrate gegeben ist durch,

$$W^{R\to L}_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} = W^{L\to R}_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} = W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} \tag{27}$$

(c) Der Tunnelstrom durch den Tunnelkontakt ist gegeben durch,

$$I = I_{L\to R} - I_{R\to L} = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} (f_L(\epsilon_{\mathbf{p}'}) - f_R(\epsilon_{\mathbf{p}})) \tag{28}$$

und damit

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} (f_L(\epsilon_{\mathbf{p}'}) - f_R(\epsilon_{\mathbf{p}})) && (29) \\ &= \frac{2\pi e}{\hbar} |T|^2 \int d\epsilon_{\mathbf{p}} \int d\epsilon_{\mathbf{p}'} N(\epsilon_{\mathbf{p}}) N(\epsilon_{\mathbf{p}'}) \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'}) (f_L(\epsilon_{\mathbf{p}'}) - f_R(\epsilon_{\mathbf{p}})) && (30) \\ &= \frac{2\pi e}{\hbar} |T|^2 N^2 \int d\epsilon_{\mathbf{p}} \int d\epsilon_{\mathbf{p}'} \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'}) (f_L(\epsilon_{\mathbf{p}'}) - f_R(\epsilon_{\mathbf{p}})) && (31) \\ & && (32) \end{aligned}$$

Hierbei habe wir bereits verwendet das die Zustandsdichte an der Fermikante konstant ist. Betrachten wir nun das Integral ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int d\epsilon_{\mathbf{p}}(f_L(\epsilon_{\mathbf{p}}) - f_R(\epsilon_{\mathbf{p}})) &= \int_0^\infty d\epsilon_{\mathbf{p}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\mu_L)}+1} - \int_0^\infty d\epsilon_{\mathbf{p}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\mu_R)}+1} && (33)\\
&= k_B T \left[\int_{-\beta\mu_L}^\infty d\epsilon_{\mathbf{p}} \frac{1}{e^x+1} - \int_{-\beta\mu_R}^\infty d\epsilon_{\mathbf{p}} \frac{1}{e^{x)}+1} \right] && (34)\\
&= k_B T \int_{-\beta\mu_L}^{\beta\mu_R} \frac{1}{e^x+1} && (35)\\
&= k_B T \ln \left[\frac{e^{-\beta\mu_R} + e^{\beta(\mu_L-\mu_R)}}{1+e^{-\beta\mu_R}} \right] && (36)
\end{aligned}$$

Nun kann man annehmen das $\mu_R \propto \epsilon_F$ und damit $e^{-\beta\mu_R} \to 0$. Damit ergibt sich,

$$\int d\epsilon_{\mathbf{p}}(f_L(\epsilon_{\mathbf{p}}) - f_R(\epsilon_{\mathbf{p}})) = eV \tag{37}$$

und damit

$$I = \frac{2\pi e}{\hbar}|T|^2 N^2 eV = GV \tag{38}$$

mit

$$G = \frac{2\pi e}{\hbar}|T|^2 N^2 \tag{39}$$

wobei N die Zustandsdichte and er Fermikante ist.