Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie WS 13/14

Prof. Dr. G. Schön
Dr. M. Marthaler

Blatt 5
Besprechung, 02.12.13

---

1. Elektron-Phonon Streuung (20 Punkte)

Wir betrachten die Boltzmangleichung für ein Elektronengas unter Einfluss eines angelegten elektrischen Feldes $\mathbf{E}$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} + e\mathbf{E}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\right) f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} \tag{1}$$

Das Stoßintegral soll für Elektron-Phonon Streuung ausgewertet werden. Für die Berechnung des Stoßintegrals spielt die Ortsabhängigkeit keine Rolle und wir verwenden die Notation $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = f(\epsilon_{\mathbf{p}})$. Mit den Raten $W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} = W^{+}_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} + W^{-}_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'}$ die auf Aufgabenblatt 3 berechnet wurden, lässt sich das Stoßintegral schreiben als

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} = \sum_{\mathbf{p}'} \left[W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} f(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f(\epsilon_{\mathbf{p}})) - W_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} f(\epsilon_{\mathbf{p}})(1-f(\epsilon_{\mathbf{p}'}))\right] \tag{2}$$

Wir nehmen wieder an das die Phononen im thermischen Gleichgewicht sind und ersetzen die Phononenzahl $n_{\mathbf{q}}$ durch die thermische Besetzungszahl $n_B(\omega_{\mathbf{q}})$. Für die Verteilungsfunktion $f(\epsilon_{\mathbf{p}})$ verwenden wir wie in der Vorlesung den Ansatz,

$$f(\epsilon_{\mathbf{p}}) = f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}) + \delta f(\epsilon_{\mathbf{p}})\,. \tag{3}$$

Hierbei ist $f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}})$ die Verteilungsfunktion im lokalen Gleichgewicht, und $\delta f(\epsilon_{\mathbf{p}})$ ist eine kleine Störung.

(a) (1 Punkt)Erklären sie die physikalische Bedeutung der Terme in Gl. (2).

(b) (Extra)Zeigen sie, dass gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} = 0 \tag{4}$$

für eine Verteilungsfunktion im lokalen Gleichgewicht.

(c) (4 Punkte) Linearisieren sie das Stoßintegral und verwenden sie nun, ähnlich wie in der Vorlesung diskutiert (siehe Skript Seite III-7),

$$\delta f(\epsilon_{\mathbf{p}}) = \left(-\frac{\partial f^{\text{l.e.}}}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}\right)\varphi(\mathbf{p}) \tag{5}$$

Zeigen sie, dass sich damit das Stoßintegral schreiben lässt als

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}} = \sum_{\mathbf{p}'} \frac{W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}} f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}'})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}))}{k_B T}(\varphi(\mathbf{p}') - \varphi(\mathbf{p})) \tag{6}$$

(d) (4 Punkte) Zeigen sie, dass wenn sie die expliziten Raten $W_{\mathbf{p}'\to\mathbf{p}}$ einsetzen, das Stoßintegral nur noch von $(\varphi(\mathbf{p}+\mathbf{q})-\varphi(\mathbf{p}))n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})$ abhängt.
Hinweis: Verwenden sie

$$f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}}))(n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})+1)\delta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}+\hbar\omega_{\mathbf{q}}) \tag{7}$$
$$= f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}})(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}))n_B(\hbar\omega_{\mathbf{q}})\delta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}+\hbar\omega_{\mathbf{q}}) \tag{8}$$

und nehmen sie an das die Kopplungskonstante $g_{\mathbf{q}}^{el-ph}$ nur vom Betrag von $\mathbf{q}$ abhängt.

(e) (1 Punkt) Im weiteren gehen wir davon aus, dass die Elektronenimpulse $\mathbf{p}$ deutlich grösser sind als die Phononenimpulse $\mathbf{q}$. Nähern sie nun das Stoßintegral weiter, indem sie verwenden $\varphi(\mathbf{p})=\eta(\epsilon_{\mathbf{p}})\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$, wobei sie annehmen können, dass $\eta(\epsilon_{\mathbf{p}})$ nur schwach energieabhängig ist, $\eta(\epsilon_{\mathbf{p}})\approx\eta(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})$.

(f) (4 Punkte) Führen sie die Winkelintegration aus, indem sie die Richtung des Vektors $\mathbf{p}$ als z-Richtung wählen und dann verwenden,

$$\delta(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}-\epsilon_{\mathbf{p}}\pm\omega_{\mathbf{q}})=\frac{m}{pq}\delta(\cos\theta+\frac{q}{2p}\pm\frac{m\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{pq})\,, \tag{9}$$

wobei θ der Winkel zwischen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ ist.

(g) (3 Punkte) Entwickeln sie die Verteilungsfunktionen $f^{\text{l.e.}}$ für kleine Phononenenergien und schreiben sie das Stoßintegral wieder in der Stoßzeit-Näherung,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right)_{\text{coll}}=\frac{\delta f(\epsilon_{\mathbf{p}})}{\tau^{\text{tr}}(\epsilon_{\mathbf{p}})} \tag{10}$$

Hinweis: Verwenden sie

$$f^{\text{l.e.}}(\epsilon)(1-f^{\text{l.e.}}(\epsilon'))=(f^{\text{l.e.}}(\epsilon')-f^{\text{l.e.}}(\epsilon))n_B(\epsilon-\epsilon') \tag{11}$$

(h) (3 Punkte) Berechnen sie die Temperaturabhängikeit von $1/\tau^{\text{tr}}(\epsilon_{\mathbf{p}})$ für niedrige Temperaturen ($k_BT\ll\hbar\omega_D$). Für die Kopplungskonstante soll dabei $g_{\mathbf{q}}^{el-ph}=g_0\sqrt{\omega_{\mathbf{q}}/\omega_D}$ angenommen werden.