Theorie der Kondensierten Materie I WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Mirlin, Dr. I. Gornyi
U. Briskot, N. Kainaris, Dr. E. KönigBlatt 1
Besprechung 30.10.2014

1. Ideales Bose-Gas. (10 Punkte)

In dieser Aufgabe wiederholen wir die statistische Mechanik des idealen Bose-Gases. Drücken Sie die folgenden thermodynamischen Größen in $d = 3$ durch Integrale über die Bose-Funktion n_B aus:

- (a) die großkanonische Zustandssumme Z_g ; (2 Punkte)
- (b) das großkanonische Potential Ω ; (2 Punkte)
- (c) die innere Energie U ; (2 Punkte)
- (d) die Entropie S ; (2 Punkte)
- (e) die Teilchenzahl N . (2 Punkte)

2. Zweite Quantisierung: Bose-Statistik. (10 Punkte)

Der Hamilton-Operator eines harmonischen Oszillators lautet

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right), \quad [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1.$$

Die thermische Mittelung $\langle \dots \rangle$ ist durch

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \hat{O} \right)}{\text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \right)}$$

definiert, wobei

$$\text{Tr}(\hat{O}) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle m | \hat{O} | m \rangle, \quad |m\rangle = \frac{(\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle.$$

Betrachten Sie den Operator

$$\hat{B} = \lambda^* \hat{b}^\dagger + \lambda \hat{b}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie dass

$$\langle \exp(\hat{B}) \rangle = \exp \left(\frac{1}{2} \langle \hat{B}^2 \rangle \right)$$

gilt.

3. Zweite Quantisierung: Fermi-Statistik.

(10 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N nichtwechselwirkenden Fermionen im Grundzustand $|\Psi_0\rangle$. Das System befindet sich im 3d-Volumen V . Man kann den Dichte-Operator für Teilchen mit z -Komponente des Spins σ durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrücken:

$$\hat{n}(\mathbf{r}, \sigma) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}', \sigma}.$$

Berechnen Sie die Korrelation der Teilchenzahldichte

$$\langle \Psi_0 | \hat{n}(\mathbf{r}_1, \sigma_1) \hat{n}(\mathbf{r}_2, \sigma_2) | \Psi_0 \rangle$$

für $\sigma_1 = \sigma_2$ und $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

4. Bonusaufgabe: Fermionische Kette.

(20 Bonuspunkte)

Der Hamilton-Operator einer ein-dimensionalen fermionischen Kette lautet

$$\hat{H}_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[t \left(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n+1} + \hat{a}_{n+1}^\dagger \hat{a}_n \right) - 2U \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \right].$$

Führen Sie zunächst eine Fourier-Transformation

$$\hat{a}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn} \hat{a}_k$$

durch. Damit zeigen Sie dass $\hat{H}_0 = \sum_k \epsilon(k) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ gilt mit $\epsilon(k) = 2(t \cos k - U)$.

Bestimmen Sie nun das Spektrum $\epsilon(k)$ des Hamilton-Operators $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, wobei

$$\hat{V} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta \left(\hat{a}_n \hat{a}_{n+1} + \hat{a}_{n+1}^\dagger \hat{a}_n^\dagger \right).$$