Theorie der Kondensierten Materie I WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Mirlin, Dr. I. Gornyi
U. Briskot, N. Kainaris, Dr. E. König

Blatt 10
Besprechung 15.01.2015

---

1. Dynamischer Strukturfaktor (4+4=8 Punkte)

Der dynamische Strukturfaktor des freien Elektronengases im Grundzustand ist gegeben durch

$$S(\mathbf{q},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int d^3r \int dt e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{r}-\omega t)} S(\mathbf{r},t), \qquad S(\mathbf{r},t) = \langle\Psi_0|\, \rho(\mathbf{r},t)\rho(0,0)\, |\Psi_0\rangle\,,$$

mit der zeitabhängigen Teilchendichte $\rho(\mathbf{r},t) = \sum_\sigma \psi^\dagger_\sigma(\mathbf{r},t)\psi_\sigma(\mathbf{r},t)$.

(a) Zeigen Sie, dass der Strukturfaktor als

$$S(\mathbf{q},\omega) = \frac{2}{V}\sum_{\mathbf{k}} n_F(\mathbf{k})\,[1 - n_F(\mathbf{k}+\mathbf{q})]\,\delta\left(\omega + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\right)$$

geschrieben werden kann. Dabei ist $n_F(\mathbf{k}) = \theta(k_F - k)$ die Fermi-Funktion bei $T = 0$ und k_F der Fermi-Wellenvektor.

(b) Skizzieren Sie den Bereich mit $S(\mathbf{q},\omega) \neq 0$ in der (q,ω)-Ebene.

2. Dispersion der Plasmonen (4 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir kollektive Anregungen eines 3D Elektronensystems. In der Vorlesung wurde die Plasmonenfrequenz $\omega_p(q = 0)$ abgeschätzt. Bestimmen Sie nun die volle Dispersion des plasmonischen Zweiges $\omega_p(q)$ als Funktion des Wellenvektors q.

3. Thomas-Fermi-Abschirmung in zwei Dimensionen (5+5+8=18 Punkte)

Betrachten Sie ein zweidimensionales Elektronensystem mit einer dreidimensionalen $(1/r)$ Coulomb-Wechselwirkung.

(a) Leiten Sie die Dielektrizitätsfunktion $\varepsilon(\mathbf{q})$ in der Thomas-Fermi-Näherung her.

(b) Bestimmen Sie die Abschirmung des Potentials einer äußeren Punktladung, die sich im Abstand a von der Ebene befindet.

(c) Betrachten Sie nun die Situation, dass eine Punktladung in der Ebene hinzugefügt wird. Beschreiben Sie die resultierende zeitliche Entwicklung der Ladungsdichte.