Theorie der Kondensierten Materie I WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Mirlin, Dr. I. Gornyi **Blatt 11**
U. Briskot, N. Kainaris, Dr. E. König **Besprechung 22.01.2015**

---

1. Stoner-Ferromagnetismus (2+8+5=15 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die magnetische Suszeptibilität einer Fermi-Flüssigket im Grenzfall $F_0^a \to -1$ divergiert (Stoner-Instabilität gegenüber ferromagnetischer Ordnung). Betrachten Sie das System im ferromagnetischen Zustand. Jetzt zeichnet sich das System durch eine endliche Magnetisierung aus. Nehmen Sie an, dass $\boldsymbol{m}$ der Einheitsvektor in Richtung der Magnetisierung ist. Die Energie eines Quasiteilchens hängt von der Orientierung des Spins des Teilchens bezüglich $\boldsymbol{m}$ ab und kann in Matrixform ausgedrückt werden: $\hat{\epsilon}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma}) = \epsilon_0(\boldsymbol{k})\hat{\mathbb{1}} - b(\boldsymbol{k})\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{m}$. Hierbei ist $\boldsymbol{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^T$, wobei $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ die Pauli-Matrizen sind.

(a) Die Verteilungsfunktionen für Quasiteilchen mit Spin parallel und antiparallel zu $\boldsymbol{m}$ können wie $\hat{\epsilon}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma})$ als eine einzige 2×2 Matrix-Verteilungsfunktion $\hat{n}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma})$ geschrieben werden. Drücken Sie $\hat{n}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma})$ durch $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{m}$ aus.

(b) Finden Sie die Beziehung zwischen der Funktion $b(\boldsymbol{k})$ und der Landau-Funktion $f^a_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Änderung der Quasiteilchenenergie aufgrund einer infinitesimalen Rotation der Magnetisierung, $\delta\boldsymbol{m} = [\boldsymbol{\delta\theta} \times \boldsymbol{m}]$, wobei $\delta\theta$ der kleine Drehwinkel ist.

(c) Benutzen Sie das Ergebnis aus (b) um das Kriterium der Stoner-Instabilität herzuleiten.

2. Effektive Masse (8 Punkte)

Beweisen Sie die aus der Vorlesung bekannte Relation zwischen effektiver Masse m^* des Quasiteilchens und dem Landau-Parameter F_1^s:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{1}{3}F_1^s.$$

3. Fermi-Flüssigkeit: kinetische Gleichung (7 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Energie eines Quasiteilchens in einer Fermi-Flüssigkeit unter Berücksichtigung der Wechselwirkungen mit anderen Quasiteilchen

$$\epsilon_{\boldsymbol{k}\sigma} = \epsilon^{(0)}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \sum_{\boldsymbol{k}'\sigma'} f_{\boldsymbol{k}\sigma,\boldsymbol{k}'\sigma'}\delta n_{\boldsymbol{k}'\sigma'}$$

lautet. Man kann diese Energie als den Hamiltonian H des Quasiteilchens betrachten. Die quasiklassische Dynamik der Quasiteilchenverteilungsfunktion $n_{\boldsymbol{k}\sigma}(\boldsymbol{r},t)$ wird dann durch die Hamilton-Liouville-Gleichung $\partial n/\partial t = \{H, n\}$ beschrieben, wobei $\{\ldots\}$ für die Poissonklammern steht.

Der Einfachheit halber ignorieren wir im Folgenden den Spin der Quasiteilchen (man kann z.B. eine spin-polarisierte Fermi-Flüssigkeit betrachten).

(a) Berechnen Sie die Poissonklammern und linearisieren Sie die resultierende Gleichung für kleine $\delta n_{\boldsymbol{k}}$. Zeigen Sie, dass für $u(\hat{\boldsymbol{k}}; \boldsymbol{q}, \omega) = \int \delta n_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q}, \omega) dk$ die folgende Gleichung gilt:

$$(\omega - \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}) u(\hat{\boldsymbol{k}}; \boldsymbol{q}, \omega) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{v} \int \frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{4\pi} F(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}') u(\hat{\boldsymbol{k}}'; \boldsymbol{q}, \omega), \quad F(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}') = \nu_F f_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\big|_{|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{k}'|=k_F}, \tag{1}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$ der Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{k}$ ist.

(b) **10 Bonuspunkte**

Betrachten Sie nun eine zweidimensionale Fermi-Flüssigkeit mit der isotropen Landau-Funktion $F(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}') = F_0$. Lösen Sie die kinetische Gleichung von der Form (1) für diesen Fall.