

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Mirlin, Dr. I. Gornyi
U. Briskot, N. Kainaris, Dr. E. KönigBlatt 12
Besprechung 29.01.2015

1. Effektive Elektron-Elektron-Wechselwirkung: kanonische Transformation

(6+4+12=22 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die, durch Elektron-Phonon Wechselwirkung hervorgerufene, effektive Elektron-Elektron Wechselwirkung mit Hilfe einer kanonischen Transformation hergeleitet werden. Die Form der Wechselwirkung sollte aus der Vorlesung bekannt sein, wo sie mit anderen Mitteln hergeleitet wurde.

Eine kanonische Transformation eines Operators H ist definiert durch

$$\tilde{H} = e^{-S} H e^S. \quad (1)$$

Wir betrachten nun einen Hamiltonoperator H_0 mit einer kleinen Störung V

$$H = H_0 + V. \quad (2)$$

Die Idee der kanonischen Transformation ist nun, den Operator S so zu wählen, dass der transformierte Hamiltonoperator \tilde{H} keine Terme mehr enthält, die linear in der Störung V sind.

(a) Zeigen Sie, dass die Form (1) äquivalent zu

$$\tilde{H} = H + [H, S] + \frac{1}{2} [[H, S], S] + \dots \quad (3)$$

ist, wobei $[A, B]$ der Kommutator der Operatoren A und B ist. Zeigen Sie dabei, dass die Abwesenheit von linearen Termen $\mathcal{O}(V)$ im transformierten Hamiltonoperator \tilde{H} der Forderung

$$V + [H_0, S] = 0 \quad (4)$$

entspricht.

(b) Benutzen Sie die Eigenzustände des ungestörten Hamiltonoperators $\langle n|$ und zeigen Sie, dass die Matrixelemente von S als

$$\langle n|S|m\rangle = \frac{\langle n|V|m\rangle}{E_m - E_n} \quad (5)$$

geschrieben werden können. Zeigen Sie, dass für den transformierten Hamiltonoperator nun gilt

$$\tilde{H} = H_0 + \frac{1}{2} [V, S] + \mathcal{O}(V^3). \quad (6)$$

- (c) Betrachten wir nun den aus der Vorlesung bekannten Fröhlich-Hamiltonoperator der Elektron-Phonon-Wechselwirkung,

$$H_{e-ph} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \sigma} M(\mathbf{q}) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}, \sigma} (a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^\dagger), \quad (7)$$

als Störung. Berechnen Sie mit Hilfe einer kanonischen Transformation den effektiven Hamiltonoperator. Werten Sie dazu die Matrixelemente von S bezüglich der Phononzustände aus. Da wir am Tieftemperaturverhalten interessiert sind, sind nur die Matrixelemente mit dem $T = 0$ Grundzustand $|0\rangle$ wichtig. Die Korrektur zum ungestörten Hamiltonoperator kann dann als effektive Elektron-Elektron-Wechselwirkung $V_{\mathbf{k}}^{eff}(\mathbf{q})$ geschrieben werden. Bestimmen Sie $V_{\mathbf{k}}^{eff}(\mathbf{q})$.

2. Radius des Cooper-Paars

(8 Punkte)

Berechnen Sie den mittleren Radius $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ des Cooper-Paars mit Gesamtimpuls $\mathbf{K} = 0$.