Theorie der Kondensierten Materie I WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Mirlin, Dr. I. Gornyi
U. Briskot, N. Kainaris, Dr. E. König

Blatt 13
Besprechung 05.02.2015

---

1. BCS-Grundzustand (1+3+3+3+3+3 = 16 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die BCS-Wellenfunktion

$$|\Phi_{\mathrm{BCS}}\rangle = \prod_{\boldsymbol{k}} \left(u_{\boldsymbol{k}} + v_{\boldsymbol{k}} c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right) |0\rangle$$

lautet.

(a) Zeigen Sie, dass $|\Phi_{\mathrm{BCS}}\rangle$ normiert ist, wenn $|u_{\boldsymbol{k}}|^2 + |v_{\boldsymbol{k}}|^2 = 1$ für alle $\boldsymbol{k}$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{N} \rangle$ der Teilchenzahl $\hat{N} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma}$ und die Standardabweichung $\delta N = \sqrt{\langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2}$ im BCS-Grundzustand.

(c) Berechnen Sie die Grösse $\langle \Phi_{\mathrm{BCS}} | c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} | \Phi_{\mathrm{BCS}} \rangle$ und zeichnen Sie diese Funktion in Abhängigkeit von k. Führen Sie dieselbe Rechnung für den Normalzustand (Fermi-See) $|\Phi_{FS}\rangle$ durch.

(d) Finden Sie eine äquivalente Darstellung des BCS-Grundzustandes, in welcher ein Operator $\hat{\mathcal{O}}$ auf $|\Phi_{FS}\rangle$ wirkt: $|\Phi_{\mathrm{BCS}}\rangle = \hat{\mathcal{O}} |\Phi_{FS}\rangle$.

(e) Berechnen Sie $\langle \Phi_{\mathrm{BCS}} | b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} b^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} | \Phi_{\mathrm{BCS}} \rangle$, wobei die Operatoren $b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma} = u^*_{\boldsymbol{k}} c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma} - \sigma v^*_{\boldsymbol{k}} c_{-\boldsymbol{k},-\sigma}$ über die Bogoliubov-Transformation mit den gewöhnlichen Erzeugern und Vernichtern der Quasiteilchen zusammenhängen.

(f) Berechnen Sie $\langle \Phi_{\mathrm{BCS}} | \hat{H}_{\mathrm{BCS}} | \Phi_{\mathrm{BCS}} \rangle$ mit

$$\hat{H}_{\mathrm{BCS}} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \xi_k c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma} - \sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \lambda_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'\uparrow} c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}'\downarrow} c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} c_{\boldsymbol{k}\uparrow}.$$

2. BCS-Variationsmethode (4+3=7 Punkte)

Wir möchten nun mit Hilfe der Variationsmethode die Grundgleichungen der BCS-Theorie herleiten. Dazu minimieren wir den Erwartungswert des Hamiltonoperators aus der Aufgabe 1f bezüglich $|\Phi_{\mathrm{BCS}}\rangle$, indem wir $u_{\boldsymbol{k}}$ und $v_{\boldsymbol{k}}$ variieren:

$$\delta \langle \Phi_{\mathrm{BCS}} | \hat{H}_{\mathrm{BCS}} | \Phi_{\mathrm{BCS}} \rangle = 0.$$

(a) Parametrisieren Sie dazu $u_{\boldsymbol{k}} = \sin(\theta_{\boldsymbol{k}})$ und $v_{\boldsymbol{k}} = \cos(\theta_{\boldsymbol{k}})$. Minimieren Sie den obigen Erwartungswert, indem Sie

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{\boldsymbol{p}}} \langle \Phi_{\mathrm{BCS}} | \hat{H}_{\mathrm{BCS}} | \Phi_{\mathrm{BCS}} \rangle = 0$$

setzen, und zeigen Sie, dass dann folgt

$$\tan(2\theta_{\boldsymbol{k}}) = -\frac{1}{2\xi_{\boldsymbol{k}}} \sum_{\boldsymbol{k}'} \lambda_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \sin(2\theta_{\boldsymbol{k}'}) = -\frac{\Delta_{\boldsymbol{k}}}{\xi_{\boldsymbol{k}}},$$

wobei $\Delta_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k}'} \lambda_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} u_{\boldsymbol{k}'} v_{\boldsymbol{k}'}$.

(b) Zeigen Sie, dass Sie hieraus die folgende Selbstkonsistenz-Gleichung für $\Delta_{\boldsymbol{k}}$ erhalten:

$$\Delta_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}'} \lambda_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \frac{\Delta_{\boldsymbol{k}'}}{\sqrt{\xi_{\boldsymbol{k}'}^2 + \Delta_{\boldsymbol{k}'}^2}}.$$

3. Spin-Suszeptibilität eines Supraleiters (7 Punkte)

Berechnen Sie die Pauli-Spin-Suszeptibilität eines BCS-Supraleiters als Funktion der Temperatur. Diese Rechnung kombiniert Aspekte der Berechnung der Wärmekapazität in Supraleitern sowie der Spinsuszeptibilität des normalen Zustandes aus der Vorlesung.