Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2014/2015

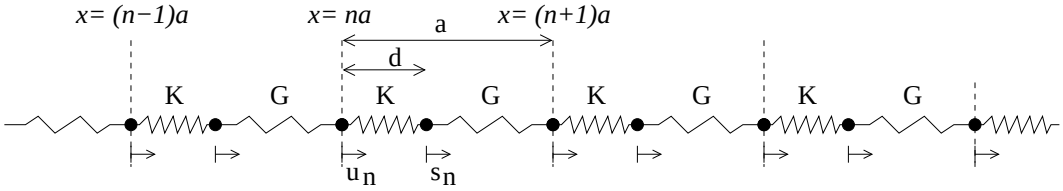
Prof. Dr. A. Mirlin, Dr. I. Gornyi
U. Briskot, N. Kainaris, Dr. E. König

Blatt 7
Besprechung 11.12.2014

---

1. Harmonische Kette (7+5+3+3+2=20 Punkte)

$2N$ identische Massen m können sich auf der x-Achse reibungsfrei bewegen und sind abwechselnd mit unterschiedlichen Federn $K > G$ verbunden:



Mit den Auslenkungen u_n und s_n aus den jeweiligen Ruhelagen bei $x = na$ und $x = (na + d)$ (s. Abbildung) lautet die elastische Energie:

$$U = \frac{K}{2} \sum_n (u_n - s_n)^2 + \frac{G}{2} \sum_n (u_{n+1} - s_n)^2.$$

(a) Schreiben Sie die klassischen Bewegungsgleichungen für u_n und s_n mit periodischen Randbedingungen $u_{n+N}(t) = u_n(t)$, $s_{n+N}(t) = s_n(t)$. Bestimmen Sie die Frequenzen $\omega_\pm(k)$ der akustischen $(-)$ und optischen $(+)$ Eigenmoden der Kette. Wie verhalten sich $\omega_\pm(k)$ für kleine $|k| \ll \pi/a$? Skizzieren Sie $\omega_\pm(k)$ für alle erlaubten k.

(b) Die in Aufgabe 1(a) berechneten Gitterschwingungen können quantisiert werden. Geben Sie den Hamilton-Operator für jede Mode $\lambda \equiv (k, \pm)$ an. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme.

(c) Betrachten Sie den Limes hoher Temperaturen und zeigen Sie, dass Sie die klassischen Resultate für die innere Energie (Gleichverteilungssatz) und die spezifische Wärme c_V (Dulong-Petit) finden.

(d) Nehmen Sie an, dass für tiefe Temperaturen nur noch akustische Phononen zum physikalischen Verhalten beitragen und nähern Sie $\omega_-(k) = c_a k$. Bestimmen Sie die innere Energie und c_V in diesem Limes.

(e) Verwenden Sie nun die noch stärkere Näherung $\omega_\lambda = \omega_0 = \text{const}$ für alle λ (Einstein-Modell). Berechnen Sie wiederum c_V.

2. Phononen in Graphen (10 Punkte)

Betrachten Sie das Gitter von Graphen. Nehmen Sie an, dass die Kohlenstoff-Atome sich nur innerhalb der zwei-dimensionalen Ebene bewegen können. Benutzen Sie die harmonische Näherung (mit Kraftkonstanten zwischen nächsten Nachbarn) und berechnen Sie das Spektrum der Phononen.