Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Mirlin, Dr. I. Gornyi

U. Briskot, N. Kainaris, Dr. E. König

Blatt 11

Besprechung 22.01.2015

---

1. Stoner-Ferromagnetismus (2+8+5=15 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die magnetische Suszeptibilität einer Fermi-Flüssigket im Grenzfall $F_0^a \to -1$ divergiert (Stoner-Instabilität gegenüber ferromagnetischer Ordnung). Betrachten Sie das System im ferromagnetischen Zustand. Jetzt zeichnet sich das System durch eine endliche Magnetisierung aus. Nehmen Sie an, dass $\boldsymbol{m}$ der Einheitsvektor in Richtung der Magnetisierung ist. Die Energie eines Quasiteilchens hängt von der Orientierung des Spins des Teilchens bezüglich $\boldsymbol{m}$ ab und kann in Matrixform ausgedrückt werden: $\hat{\epsilon}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma}) = \epsilon_0(\boldsymbol{k})\hat{\mathbb{1}} - b(\boldsymbol{k})\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{m}$. Hierbei ist $\boldsymbol{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^T$, wobei $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ die Pauli-Matrizen sind.

(a) Die Verteilungsfunktionen für Quasiteilchen mit Spin parallel und antiparallel zu $\boldsymbol{m}$ können wie $\hat{\epsilon}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma})$ als eine einzige 2×2 Matrix-Verteilungsfunktion $\hat{n}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma})$ geschrieben werden. Drücken Sie $\hat{n}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma})$ durch $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{m}$ aus.

Lösung:
Die Energie der Quasiteilchen lautet laut Aufgabenstellung

$$\hat{\epsilon}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma}) = \epsilon_0(\boldsymbol{k})\hat{\mathbb{1}} - b(\boldsymbol{k})\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{m}. \tag{1}$$

Wir bezeichnen die Verteilungsfunktion für Elektronen mit Spin parallel (antiparallel) zu $\boldsymbol{m}$ mit n_+ (n_-). Die Verteilungsfunktion in Matrixform lautet dann

$$n(\mathbf{k},\boldsymbol{\sigma}) = n_0(\boldsymbol{k})\hat{\mathbb{1}} + \frac{1}{2}\left(n_+(\boldsymbol{k}) - n_-(\boldsymbol{k})\right)\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{m}\,, \tag{2}$$

wobei $n_0(\boldsymbol{k}) = \big[n_+(\boldsymbol{k}) + n_-(\boldsymbol{k})\big]/2$ bezeichnet.

(b) Finden Sie die Beziehung zwischen der Funktion $b(\boldsymbol{k})$ und der Landau-Funktion $f^a_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Änderung der Quasiteilchenenergie aufgrund einer infinitesimalen Rotation der Magnetisierung, $\boldsymbol{\delta m} = [\boldsymbol{\delta\theta} \times \boldsymbol{m}]$, wobei $\delta\theta$ der kleine Drehwinkel ist..

Lösung:
Unter der Drehung ändert sich die Magnetisierung um $\boldsymbol{m} \to \boldsymbol{m} + \boldsymbol{\delta m}$. Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass $\boldsymbol{\delta m} \parallel \hat{z}$ und bezeichnen die Eigenwerte von σ_z mit $\sigma = \pm 1$. Die Energie und die Verteilungsfunktion der Quasiteilchen ändern sich unter der Rotation als

$$\delta\epsilon_{\boldsymbol{k},\sigma} = -\, b(\boldsymbol{k})\,\sigma\,\delta\theta\,, \tag{3}$$

$$\delta n_{\boldsymbol{k},\sigma} = \frac{1}{2}\left(n_+(\boldsymbol{k}) - n_-(\boldsymbol{k})\right)\sigma\,\delta\theta\,. \tag{4}$$

In der Landau Beschreibung lautet die Energie eines Quasiteilchens im Magnetfeld $\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{m}$,

$$\epsilon_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma}} = \epsilon^{(0)}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{\sigma}'} f_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{\sigma}'} \delta n_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{\sigma}'} + \gamma H \boldsymbol{\sigma m}\,. \tag{5}$$

Der zweite Term stammt von der Zeeman Aufspaltung der Bänder und $\gamma = g\mu_B$. Unter einer infinitesimalen Rotation finden wir

$$\begin{aligned}
\delta\epsilon_{\boldsymbol{k},\sigma} =& \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}',\sigma'} f_{\boldsymbol{k},\sigma,\boldsymbol{k}',\sigma'} \delta n_{\boldsymbol{k}',\sigma'} + \gamma H \sigma \delta\theta \\
=& \frac{1}{V}\frac{\delta\theta}{2}\sum_{\boldsymbol{k}',\sigma'} f_{\boldsymbol{k},\sigma,\boldsymbol{k}',\sigma'} \left(n_+(\boldsymbol{k}) - n_-(\boldsymbol{k})\right)\sigma' + \gamma H \sigma \delta\theta \\
=& \frac{1}{V}\frac{\delta\theta}{2}\sum_{\boldsymbol{k}',\sigma'} \left[f^s_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} + \sigma\sigma' f^a_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\right] \left(n_+(\boldsymbol{k}) - n_-(\boldsymbol{k})\right)\sigma' + \gamma H \sigma \delta\theta \\
=& \Big[\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}'} f^a_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \left(n_+(\boldsymbol{k}) - n_-(\boldsymbol{k})\right) + \gamma H\Big]\sigma\delta\theta\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Im zweiten Schritt haben wir die Landau Funktion in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Teil zerlegt,

$$f_{\boldsymbol{k},\sigma,\boldsymbol{k}',\sigma'} = f^s_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} + \sigma\sigma' f^a_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\,. \tag{7}$$

Im letzten Schritt verschwindet der symmetrische Anteil aufgrund der Summation über σ'. Vergleich der Ausdrücke in Gleichung (3) und (6) liefert den Ausdruck für $b(\boldsymbol{k})$:

$$b(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}'} f^a_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \left(n_+(\boldsymbol{k}) - n_-(\boldsymbol{k})\right) + \gamma H\,. \tag{8}$$

(c) Benutzen Sie das Ergebnis aus (b) um das Kriterium der Stoner-Instabilität herzuleiten.

Lösung:
Zunächst entwickeln wir die Differenz der Verteilungsfunktionen für $b(\boldsymbol{k}) \ll 1$ und tiefe Temperaturen $T \ll \mu$,

$$\begin{aligned}
n_+(\boldsymbol{k}) - n_-(\boldsymbol{k}) = n^0\big[\epsilon^0(\boldsymbol{k}) - b(\boldsymbol{k})\big] - n^0\big[\epsilon^0(\boldsymbol{k}) + b(\boldsymbol{k})\big] &\simeq -2\frac{\delta n^0[\epsilon^0(\boldsymbol{k})]}{\delta\epsilon^0(\boldsymbol{k})} b(\boldsymbol{k}) \\
\simeq 2\delta(\epsilon^0(\boldsymbol{k}) - \mu) b(\boldsymbol{k})\,.&
\end{aligned} \tag{9}$$

Hierbei ist $n^0(\epsilon) = \theta(\mu - \epsilon)$ die Fermi Verteilung bei $T = 0$. Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (8) ein, erhalten wir die Selbstkonsistenzgleichung

$$b(\boldsymbol{k}) = -\frac{2}{V}\sum_{\boldsymbol{k}'} f^a_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \delta(\epsilon^0(\boldsymbol{k}') - \mu) b(\boldsymbol{k}') + \gamma H\,. \tag{10}$$

Die Delta Distribution schränkt k' auf den Fermiimpuls ein und da die Energieänderung $\delta\epsilon_{\boldsymbol{k},\sigma}$ auch an der Fermikante stattfindet setzen wir auch $k = k_F$. Die Funktion

f^a hängt somit nur noch von den Richtungen der Impulse ab und wir entwickeln sie in Legendre Polynomen

$$f_{\hat{\boldsymbol{k}},\hat{\boldsymbol{k}}'} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos(\theta)) \,, \tag{11}$$

wobei θ der Winkel zwischen $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{k}'$ ist. Wir suchen nun Lösungen der Selbstkonsistenzgleichung der Form $b(\boldsymbol{k}) = b(|\boldsymbol{k}|)$. Das Ergebnis lautet

$$b(k_F) = -F_0^a b(k_F) + \gamma H \,, \tag{12}$$

mit der dimensionslosen Variablen $F_0^a = \nu_F f_0^a$ und der Zustandsdichte

$$\nu_F = \frac{2}{V} \sum_{\boldsymbol{k}} \delta(\epsilon_{\boldsymbol{k}} - \mu) \,. \tag{13}$$

Somit erhalten wir

$$b(k_F) = \frac{\gamma H}{1 + F_0^a} \,. \tag{14}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (1) ein, so finden wir

$$\delta\epsilon_\sigma(k_F) = \frac{\gamma H \sigma}{1 + F_0^a} \,. \tag{15}$$

Um die Stoner Instabilität zu untersuchen, betrachten wir die Magnetisierung

$$\begin{aligned} M =& -\gamma \frac{1}{V} \sum_{\boldsymbol{k},\sigma} \sigma \delta n_{\boldsymbol{k},\sigma} = -\gamma \frac{1}{V} \sum_{\boldsymbol{k},\sigma} \sigma \frac{\partial n}{\partial \epsilon} \delta\epsilon_{\boldsymbol{k},\sigma} \\ =& \frac{1}{2} \gamma \nu_F \sum_{\sigma} \sigma \delta\epsilon_\sigma(k_F) = \frac{\gamma^2 H \nu_F}{1 + F_0^a} \,. \end{aligned} \tag{16}$$

Die magnetische Suszeptibilität lautet somit

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{\chi_{\text{Pauli}}}{1 + F_0^a} \,. \tag{17}$$

Hierbei bezeichnet $\chi_{\text{Pauli}} = \nu_F \gamma^2$ die Suszeptibilität des nichtwechselwirkenden Elektronengases. Diese wird durch Wechselwirkung renormiert und kann insbesondere für $F_0^a = -1$ divergieren. Dies bezeichnet man als Stoner Instabilität.

2. Effektive Masse (8 Punkte)

Beweisen Sie die aus der Vorlesung bekannte Relation zwischen effektiver Masse m^* des Quasiteilchens und dem Landau-Parameter F_1^s:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{1}{3} F_1^s.$$

Lösung:

Wir betrachten eine Galilei Transformation zwischen einem Bezugssystem K und einem Bezugssystem K' welches sich relativ zu K mit einer Geschwindigkeit u bewegt. Die Energie E' und der Gesamtimpuls $\boldsymbol{P}'$ eines Elektronengases im System K' lauten

$$E' = E - \boldsymbol{P}\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}Mu^2\,, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P} - M\boldsymbol{u}\,, \tag{19}$$

wobei $M = Nm$ die Gesamtmasse eines Systems von N Elektronen mit der Masse m ist. Fügen wir nun ein Teilchen zu dem System hinzu so ändert sich im System K:

$$M \to M + m\,, \qquad \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P} + \boldsymbol{p}\,, \qquad E \to E + \epsilon_{\boldsymbol{p}}\,. \tag{20}$$

Im System K' folgt daraus

$$E' \to \; E' + \epsilon_{\mathbf{p}} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}mu^2\,, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{P}' \to \; \boldsymbol{P}' - m\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p}\,. \tag{22}$$

Da die Anzahl der Teilchen und Quasiteilchen identisch gehalten wird können wir die Energieänderung $\delta E'$ als Energie einer Quasiteilchenanregung in K' identifizieren, d.h.

$$\epsilon'_{\boldsymbol{p}} = \epsilon_{\boldsymbol{p}+m\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}mu^2\,. \tag{23}$$

Betrachten wir nun den Fall einer infinitesimalen Galilei Transformation, $|\boldsymbol{u}| \ll v_F$. Somit gilt für Impulse $|\boldsymbol{p}| = p_F$

$$\epsilon'_{\boldsymbol{p}} = \epsilon_{\boldsymbol{p}} + \nabla\epsilon_{\boldsymbol{p}} m\boldsymbol{u} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{u} = \epsilon_{\boldsymbol{p}}\frac{m - m^*}{m^*}\boldsymbol{p}\boldsymbol{u}\,. \tag{24}$$

wobei wir die Dispersion $\epsilon_{\boldsymbol{p}} = p^2/2m^*$ benutzt haben. Betrachten wir nun die Verteilungsfunktion im System K'. Diese ist im Bezug auf die Fermikugel $n^0_{\boldsymbol{p}}$ in K um einen festen Impuls verschoben

$$n'_{\boldsymbol{p}} = n^0_{\boldsymbol{p}+m\boldsymbol{u}} \simeq n^0_{\boldsymbol{p}} + m\boldsymbol{u}\nabla_{\boldsymbol{p}} n^0_{\boldsymbol{p}}\,. \tag{25}$$

Nach Landau lässt sich die Quasiteilchenenergie als Funktional der Verteilungfunktion ausdrücken. Für eine infinitesimale Galileitransformations gilt

$$\begin{aligned} \epsilon'_{\boldsymbol{p},\sigma} = \;& \epsilon_{\boldsymbol{p},\sigma}\left[n'_{\boldsymbol{p},\sigma}\right] = \epsilon_{\boldsymbol{p}}\left[n'_{\boldsymbol{p}+m\boldsymbol{u},\sigma}\right] \simeq \epsilon_{\boldsymbol{p},\sigma}\left[n^0_{\boldsymbol{p}} + m\boldsymbol{u}\nabla_{\boldsymbol{p}} n^0_{\boldsymbol{p}}\right] \\ \simeq \;& \epsilon_{\boldsymbol{p}}\left[n^0_{\boldsymbol{p}}\right] + \int \frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma'} \frac{\delta\epsilon_{\boldsymbol{p},\sigma}}{\delta n_{\boldsymbol{p}',\sigma'}} \delta n_{\boldsymbol{p}',\sigma'}\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Hierbei

$$\delta n_{\boldsymbol{p}',\sigma'} = m\boldsymbol{u}\nabla_{\boldsymbol{p}'} n^0_{\boldsymbol{p}',\sigma'} = m\boldsymbol{u}\nabla_{\boldsymbol{p}'}\epsilon_{\boldsymbol{p}',\sigma'}\frac{\partial n^0_{\boldsymbol{p}'},\sigma'}{\partial\epsilon_{\boldsymbol{p}',\sigma'}} = m\boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{p}'}{m^*}\frac{\partial n^0_{\boldsymbol{p}'}}{\partial\epsilon_{\boldsymbol{p}',\sigma'}} \tag{27}$$

und

$$\frac{\delta\epsilon_{\boldsymbol{p},\sigma}}{\delta n_{\boldsymbol{p}',\sigma'}} = f_{\boldsymbol{p},\sigma,\boldsymbol{p}',\sigma'}\,. \tag{28}$$

Wir erhalten somit den Ausdruck für die Quasiteilchenenergie in K':

$$\epsilon'_{\boldsymbol{p}} = \epsilon^0_{\boldsymbol{p}} + \int \frac{\mathrm{d}^3 p'}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma'} f_{\boldsymbol{p},\sigma,\boldsymbol{p}',\sigma'} m \boldsymbol{u} \frac{\boldsymbol{p}'}{m^*} \frac{\partial n^0_{\boldsymbol{p}'}}{\partial \epsilon_{\boldsymbol{p}',\sigma'}} \,. \tag{29}$$

Insbesondere bei niedrigen Temperaturen und $p = p_F$

$$\begin{aligned} \epsilon'_{\boldsymbol{p}} =& \ \epsilon^0_{\boldsymbol{p}} - \int \frac{\mathrm{d}^3 p'}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma'} \left[f^s_{\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{p}}'} + \sigma\sigma' f^a_{\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{p}}'} \right] m \boldsymbol{u} \frac{\boldsymbol{p}'}{m^*} \delta(\epsilon_{\boldsymbol{p}'} - \mu) \\ =& \ \epsilon^0_{\boldsymbol{p}} - 2 \frac{m}{m^*} \boldsymbol{u} \int \frac{\mathrm{d}^3 p'}{(2\pi)^3} \, f^s_{\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{p}}'} \delta(\epsilon_{\boldsymbol{p}'} - \mu) \,. \end{aligned} \tag{30}$$

Somit müssen wir folgendes Integral bestimmen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_1(\hat{\boldsymbol{p}}) =& \int \frac{\mathrm{d}^3 p'}{(2\pi)^3} \, f^s_{\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{p}}'} \hat{\boldsymbol{p}}' \delta(\epsilon_{\boldsymbol{p}'} - \mu) \\ =& \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}\Omega_{\boldsymbol{p}'}}{4\pi} \, f^s_{\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{p}}'} \hat{\boldsymbol{p}}' \int_0^\infty \mathrm{d}p' \, (p')^3 \delta\left(\frac{(p')^2}{2m^*} - \mu \right) \\ =& \nu_F p_F \boldsymbol{I}_2(\hat{\boldsymbol{p}}) \,. \end{aligned} \tag{31}$$

In der letzten Zeile haben wir

$$\nu_F = \frac{m^*}{2\pi^2} \sqrt{2m^*\mu} \qquad \text{und} \qquad p_F = \sqrt{2m^*\mu} \tag{32}$$

benutzt. Zudem haben wir das Integral $\boldsymbol{I}_2$ eingeführt:

$$\boldsymbol{I}_2(\hat{\boldsymbol{p}}) = \int \frac{\mathrm{d}\Omega_{\boldsymbol{p}'}}{4\pi} \, f^s_{\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{p}}'} \hat{\boldsymbol{p}}' = \alpha \hat{\boldsymbol{p}} \,. \tag{33}$$

Beachten Sie, dass die Größe $\boldsymbol{I}_2$ nur von einer Richtung abhängt und daher zu dieser proportional sein muss. Die Proportionalitätskonstante erhalten wir durch

$$\alpha = \boldsymbol{I}_2(\hat{\boldsymbol{p}}) \boldsymbol{p} = \int \frac{\mathrm{d}\Omega_{\boldsymbol{p}'}}{4\pi} \, f^s_{\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{p}}'} \hat{\boldsymbol{p}}' \hat{\boldsymbol{p}} \simeq f_1 \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos(\theta) \, \cos^2(\theta) = \frac{1}{3} f_1 \,. \tag{34}$$

Hier bezeichnet θ den Winkel zwischen $\hat{\boldsymbol{p}}$ und $\hat{\boldsymbol{p}}'$ und wir haben die Landaufunktion in Legendre Polynome entwickelt

$$f^s_{\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{p}}'} = \sum_{l=0}^\infty P_l(\cos(\theta)) f_l \,. \tag{35}$$

Mit $F^s_1 = \nu_F f^s_1$ finden wir somit für die Quasiteilchenenergie bei $p = p_F$

$$\epsilon'_{\boldsymbol{p}} = \epsilon_{\boldsymbol{p}} - \frac{1}{3} \frac{m}{m^*} \boldsymbol{u} \boldsymbol{p} F^s_1 \,. \tag{36}$$

Durch Gleichsetzen der Ergebnisse in Gleichung (24) und (36) erhalten wir die gesuchte Bedingung:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{1}{3} F^s_1 \,. \tag{37}$$

3. **Fermi-Flüssigkeit: kinetische Gleichung** (7 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Energie eines Quasiteilchens in einer Fermi-Flüssigkeit unter Berücksichtigung der Wechselwirkungen mit anderen Quasiteilchen

$$\epsilon_{\boldsymbol{k}\sigma} = \epsilon^{(0)}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \sum_{\boldsymbol{k}'\sigma'} f_{\boldsymbol{k}\sigma,\boldsymbol{k}'\sigma'} \delta n_{\boldsymbol{k}'\sigma'}$$

lautet. Man kann diese Energie als den Hamiltonian H des Quasiteilchens betrachten. Die quasiklassische Dynamik der Quasiteilchenverteilungsfunktion $n_{\boldsymbol{k}\sigma}(\boldsymbol{r}, t)$ wird dann durch die Hamilton-Liouville-Gleichung $\partial n/\partial t = \{H, n\}$ beschrieben, wobei $\{\ldots\}$ für die Poissonklammern steht.

Der Einfachheit halber ignorieren wir im Folgenden den Spin der Quasiteilchen (man kann z.B. eine spin-polarisierte Fermi-Flüssigkeit betrachten).

(a) Berechnen Sie die Poissonklammern und linearisieren Sie die resultierende Gleichung für kleine $\delta n_{\boldsymbol{k}}$. Zeigen Sie, dass für $u(\hat{\boldsymbol{k}}; \boldsymbol{q}, \omega) = \int \delta n_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q}, \omega) dk$ die folgende Gleichung gilt:

$$(\omega - \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}) u(\hat{\boldsymbol{k}}; \boldsymbol{q}, \omega) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{v} \int \frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{4\pi} F(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}') u(\hat{\boldsymbol{k}}'; \boldsymbol{q}, \omega), \quad F(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}') = \nu_F f_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\big|_{|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{k}'|=k_F}\,, \tag{38}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$ der Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{k}$ ist.

Lösung:

Die Bewegungsgleichung der Quasiteilchenverteilungsfunktion lautet

$$\partial_t n + \nabla_{\boldsymbol{r}} n \nabla_{\boldsymbol{k}} \epsilon - \nabla_{\boldsymbol{k}} n \nabla_{\boldsymbol{r}} \epsilon = 0\,. \tag{39}$$

Für kleine Abweichungen der Verteilungsfunktion von der Fermiverteilung n^0 parametrisieren wir $n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}, t) = n^0(\boldsymbol{k}) + \delta n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}, t)$ und entwickeln die Bewegungsgleichung für n zu erster Ordnung in δn:

$$\partial_t \delta n + \nabla_{\boldsymbol{r}} \delta n \nabla_{\boldsymbol{k}} \epsilon^{(0)} - \nabla_{\boldsymbol{k}} n^{(0)} \nabla_{\boldsymbol{r}} \delta\epsilon = 0\,. \tag{40}$$

Um die Bewegungsgleichung zu lösen führen wir eine Fouriertransformation durch

$$\delta n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k}, \omega) = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, e^{i(\boldsymbol{q}\boldsymbol{r} - \omega t)} \delta n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}, t)\,, \tag{41}$$

und nutzen den Ausdruck für die Quasiteilchenenergie nach Landau,

$$\delta\epsilon(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}, t) = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3} f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \delta n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}', t)\,. \tag{42}$$

Somit erhalten wir

$$(\omega - \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}) \delta n_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q}, \omega) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}} \delta(\epsilon^{(0)}_{\boldsymbol{k}} - \mu) \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3} f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \delta n_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{q}, \omega)\,, \tag{43}$$

wobei

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}} = \nabla_{\boldsymbol{k}} \epsilon^{(0)}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{k}}{m^*}\,, \tag{44}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{k}} n^{(0)}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\partial n^{(0)}}{\partial \epsilon^{(0)}} \nabla_{\boldsymbol{k}} \epsilon^{(0)}_{\boldsymbol{k}} \simeq \delta(\epsilon^{(0)}_{\boldsymbol{k}} - \mu) \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}\,. \tag{45}$$

Nun integrieren wir die Gleichung über $\int \mathrm{d}k$, wobei wir aufgrund der Delta Distribution $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}} \approx \boldsymbol{v}_{\hat{\boldsymbol{k}},k=k_F} = \boldsymbol{v}_F$ setzten. Mit der Definition

$$u(\hat{\boldsymbol{k}}) = \int \mathrm{d}k\, \delta n_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q}, \omega) \tag{46}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}(\omega - \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}_F)u(\hat{\boldsymbol{k}}) &= \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}_F \left[\int \mathrm{d}k\, \delta(\epsilon^{(0)}_{\boldsymbol{k}} - \mu)\right] \int \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{k}}'}{(2\pi)^3}\, f_{\hat{\boldsymbol{k}},\hat{\boldsymbol{k}}'} \int \mathrm{d}k'\, (k')^2 \delta n_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{q}, \omega) \\ &= \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}_F \int \frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{4\pi} F(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}')u(\hat{\boldsymbol{k}}')\,.\end{aligned} \tag{47}$$

Im letzten Schritt haben wir angenommen, dass die Änderung der Verteilungsfunktion um die Fermikante konzentriert ist, d.h. $k' \approx k_F$ und wir haben die dimensionslose Größe $F(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}') = \nu_F f_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\big|_{|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{k}'|=k_F}$ eingeführt.

(b) **10 Bonuspunkte**

Betrachten Sie nun eine zweidimensionale Fermi-Flüssigkeit mit der isotropen Landau-Funktion $F(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}') = F_0$. Lösen Sie die kinetische Gleichung von der Form (1) für diesen Fall.

Lösung:

Im Falle einer 2D Fermi-Flüssingkeit mit isotroper Landaufunktion lautet die kinetische Gleichung, siehe Gleichung (47),

$$(\omega - qv_F \cos(\theta))u(\theta) = qv_F \cos(\theta) F_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta'}{2\pi}\, u(\theta')\,, \qquad -\pi \le \theta \le \pi\,. \tag{48}$$

wobei $\boldsymbol{q}\boldsymbol{v}_F = qv_F \cos(\theta)$. Die Gleichung beschreibt Wellenanregungen mit Geschwindigkeit $s = \omega/q$. Für $s < v_F$ sind dies gedämpfte Schallwellen und für $s > v_F$ sogennanter nullter Schall den wir im weiteren betrachten wollen. Zur Lösung führen wir eine Fouriertransformation durch, sei

$$u(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} u_m\,. \tag{49}$$

Somit

$$\sum_m e^{im\theta}(\omega - qv_F \cos(\theta))u_m = qv_F \cos(\theta) F_0 u_0\,. \tag{50}$$

Wir nutzen nun die Vollständigkeitsrelation

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta'}{2\pi}\, e^{i(m-m')\theta} = \delta_{m,m'}\,. \tag{51}$$

Dazu multiplizieren wir die Gleichung (50) mit $e^{-im'\theta}$ und integrieren über $\int \mathrm{d}\theta/2\pi$. Somit erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für die Fourierkoeffizienten

$$u_{m'}\omega - \frac{qv_F}{2}(u_{m'-1} + u_{m'-1}) = \frac{qv_F}{2} F_0 u_0 \left(\delta_{m',1} + \delta_{m',-1}\right)\,. \tag{52}$$

Dies lässt sich zusammenfassen als

$$\omega u_m = \frac{1}{2} q v_F (\tilde{u}_{m+1} + \tilde{u}_{m-1}), \qquad \tilde{u}_m = \begin{cases} u_m,\ m \neq 0 \\ u_0(1+F_0),\ m = 0 \end{cases} . \tag{53}$$

Wir bemerken, dass die Bestimmungsgleichung translationsinvariant ($m \to m \pm 1$) ist, außer bei $m = 0$. Zudem besitzt sie eine Inversionssymmetrie unter $m \to -m$. Das Problem ist also vergleichbar zu einer Schrödingergleichung mit Potentialwall bei $m = 0$. Wir wählen als Ansatz ebene Wellen $u_m = e^{i\alpha m}$. Durch einsetzen in Gl. (53) für $|m| > 1$ erhalten wir die Dispersionsrelation $\omega = q v_F \cos(\alpha)$. Aus den ebenen Wellen konstruieren wir Lösungen mit gerader und ungerader Symmetrie unter Inversion,

$$u_m^{\text{odd}} = \sin(\alpha m) \qquad u_m^{\text{even}} = \begin{cases} \cos(\alpha m + \lambda)\,, & m > 0 \\ \cos(\alpha m - \lambda)\,, & m < 0 \\ u_0\,, & m = 0 \end{cases} . \tag{54}$$

Die ungerade Lösung erfüllt die Bestimmungsgleichgung für alle m. Wir erhalten

$$u^{\text{odd}}(\theta) = \sum_m u_m^{\text{odd}} e^{im\theta} = \frac{i}{2} \left[\delta(\theta - \alpha) - \delta(\theta + \alpha)\right] . \tag{55}$$

wobei $\omega = q v_F \cos(\alpha)$ gilt. Beachten Sie, dass für all diese Lösungen $\int \mathrm{d}\theta\, u^{\text{odd}}(\theta) = 0$ gilt. D.h. die Schwingungen finden ohne Änderung der Flüssigkeitsdichte statt. Die ungerade Lösung setzten wir in Gl. (53) für $m = 0, 1$ ein. Wir finden

$$u_0 = \frac{\cos(\lambda)}{1 + F_0}\,, \qquad \tan(\alpha)\tan(\lambda) = \frac{F_0}{1 + F_0} . \tag{56}$$

Für ein festes $\alpha(\omega)$ erhalten wir aus diesen Gleichungen die Parameter u_0 und λ. Betrachten wir nun die Lösungen des nullten Schalls, d.h. $\omega > q v_F$. Dann ist α imaginär und wir erhalten das Äquivalent zu gebundenen Zuständen. Um diese zu untersuchen machen wir den Ansatz

$$u_m^{\text{even}} = \begin{cases} e^{-\alpha m}\,, & m > 0 \\ e^{\alpha m}\,, & m < 0 \\ u_0\,, & m = 0 \end{cases} . \tag{57}$$

Einsetzen in Gl. (53) für $|m| > 1$ liefert die Dispersionrelation $\omega = q v_F \cosh(\alpha)$ und aus den Gleichungen für $m = 0, 1$ erhalten wir

$$u_0 = \frac{1}{1 + F_0}\,, \qquad e^{2\alpha} = 1 + 2F_0 . \tag{58}$$

Somit lautet die „Schallgeschwindigkeit“der Lösungen:

$$s = \frac{\omega}{q} = \frac{v_F}{2}(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}) = v_F \frac{1 + F_0}{\sqrt{1 + 2F_0}} . \tag{59}$$

Unter Verwendung der geometrischen Reihe können wir die Rücktransformation durchführen

$$\begin{aligned}
u^{\text{even}}(\theta) =& \sum_m u_m^{\text{even}} e^{im\theta} = u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(e^{i\theta-\alpha}\right)^m + \sum_{m=-1}^{-\infty} \left(e^{-i\theta-\alpha}\right)^m \\
=& u_0 + 2\text{Re}\frac{e^{i\theta}}{e^{\alpha} - e^{i\theta}} = u_0 + 2\frac{e^{\alpha}\cos(\theta) - 1}{e^{2\alpha} + 1 - 2\cos(\theta)e^{\alpha}} \\
=& u_0 + \frac{\cos(\theta) - e^{-\alpha}}{\cosh(\alpha) - \cos(\theta)} = u_0 - 1 + \frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\theta)} \\
=& -\frac{F_0}{1 + F_0} + \frac{\sqrt{\omega^2 - q^2 v_F^2}}{\omega - v_F q \cos(\theta)} \,.
\end{aligned} \tag{60}$$

Wir bemerken, dass $u(\theta)$, die richtungsabhängige Änderung der Verteilungsfunktion um die Fermikante, bei $s/v_F \simeq \cos(\theta)$ maximal ist (wir betrachten immer noch $s > v_F$, so dass die Funktion nie divergiert). Für schwache Wechselwirkung, $F_0 \ll 1$, ist $s/v_F \simeq 1 + F_0^2/2$ und die Änderung der Verteilungsfunktion ist somit nur bei kleinen Winkeln. Im Gegensatz dazu finden wir für starke Wechselwirkung, $F_0 \gg 1$, die Änderung $u(\theta) \sim \cos(\theta)$. D.h. die gesamte Fermioberfläche trägt bei.