

## Theorie der Kondensierten Materie I    WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Mirlin, Dr. I. Gornyi  
U. Briskot, N. Kainaris, Dr. E. KönigBlatt 14: Lösungen  
Besprechung 13.02.2015

## 1. Meißner-Effekt

(6+2 = 8 Punkte)

Betrachten Sie eine unendlich ausgedehnte, supraleitende Platte der Dicke  $d$  in einem statischen homogenen Magnetfeld, welches parallel zur Oberfläche der Platte ist.

- (a) Bestimmen Sie die Magnetfeldverteilung in der Platte.  
 (b) Berechnen Sie die mittlere Magnetisierung der Platte als Funktion von  $d$ .

**Lösung:**

Zur Bearbeitung dieser und der nächsten Aufgabe benötigen wir die London Gleichungen

$$\mathbf{j} = e^2 \frac{n_s}{m} \mathbf{E}, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{e^2 n_s}{cm} \mathbf{B}. \quad (1b)$$

Wie üblich ist  $n_s$  die (dreidimensionale) Dichte supraleitender Ladungsträger.  
 Betrachten wir nun das Ampère Gesetz

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2)$$

und bilden die Rotation auf beiden Seiten. Unter Benutzung von Gl. (1b) folgt

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}. \quad (3)$$

Die London Penetrationslänge ist  $\lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}}$ .

- (a) Betrachten wir nun die Anordnung, die in der Aufgabenstellung beschrieben wird und in Abb. 1 zusammengefasst wird. Gesucht wird die magnetische Induktion  $\mathbf{B}(x) = B(x)\hat{y}$  innerhalb der supraleitenden Schicht. Als Randbedingung gilt

$$B(x) = B_0 \quad \forall x \neq (-d/2, d/2).$$

Die Lösung der Differentialgleichung (3), die diesen Randbedingungen genügt ist

$$B(x) = B_0 \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(d/2\lambda)}. \quad (4)$$

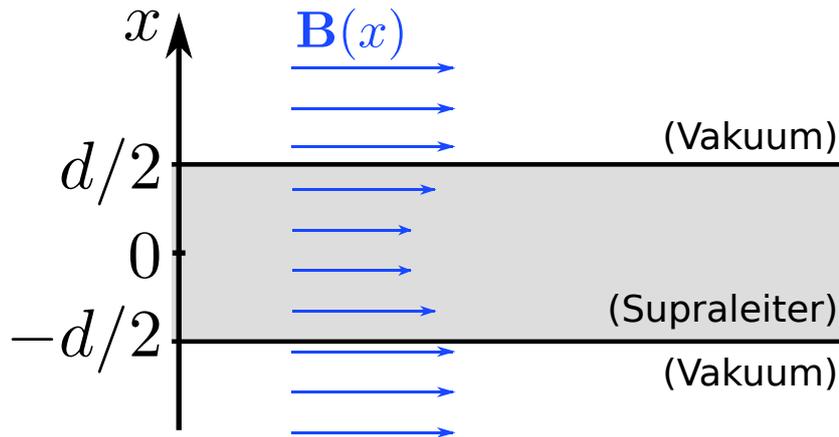


Abbildung 1: Ein zweidimensionaler supraleitender Film der Dicke  $d$  im parallelen Magnetfeld.

(b) Berechnen wir nun zunächst die mittlere Flussdichte in der Platte:

$$\langle B \rangle = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} B(x) dx = B_0 \frac{2\lambda}{d} \tanh \frac{d}{2\lambda}. \quad (5)$$

Unter Benutzung von  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$  folgt für die Magnetisierung in  $y$ -Richtung

$$M_y(x) = \frac{B_0}{4\pi} \left[ \frac{2\lambda}{d} \tanh \frac{d}{2\lambda} - 1 \right]. \quad (6)$$

Für dünne Platten  $d \ll \lambda$  verhält sich die Magnetisierung wie

$$M_y(x) \sim -\frac{B_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{d}{2\lambda} \right)^2 \right] \quad (7)$$

während für dicke Platten  $d \gg \lambda$  gilt

$$M_y(x) \sim -\frac{B_0}{4\pi} \left[ 1 - \frac{2\lambda}{d} \right]. \quad (8)$$

## 2. Kritischer Strom

(6+4+2+2+2 = 16 Punkte)

Betrachten Sie einen unendlich langen zylinderförmigen Draht mit dem Radius  $R$ .

Ein Strom, der durch den supraleitenden Draht fließt, erzeugt das Magnetfeld außerhalb des Drahtes. Wenn dieses Feld den kritischen Wert an der Oberfläche des Drahtes erreicht, wird die Supraleitfähigkeit zerstört.

- Berechnen Sie die Stromdichteverteilung im Inneren des Drahtes.
- Finden Sie die Verteilung des magnetischen Feldes außerhalb des Drahtes.
- Bestimmen Sie den kritischen Strom im Draht.
- Ist es besser einen dicken Draht oder viele dünne Drähte (mit dem gleichen Gesamtquerschnitt wie der dicke Draht) zu verwenden um eine höhere kritische Stromstärke zu erreichen?
- Berechnen Sie den kritischen Strom durch einen Bleidraht mit  $R = 1 \text{ mm}$ ,  $T_c = 7.2 \text{ K}$  und  $H_c(T = 0) = 800 \text{ Oe}$  für die Temperatur  $T = 4.2 \text{ K}$ .

### Lösung:

Bei Einsetzen von Gl. (1b) folgt aus dem Ampère Gesetz (2)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{j} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{j}) - \nabla^2 \mathbf{j} = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{j} \quad (9)$$

Im statischen Fall ist  $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\dot{\rho} = 0$ .

- Betrachten wir nun die in der Aufgabenstellung und in Abb. 2 beschriebene Situation. In Zylinderkoordinaten wird Gl. (9) zu

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r j) = \frac{1}{\lambda^2} j(r). \quad (10)$$

Führen wir nun den dimensionslosen Radius  $\rho = r/\lambda$  ein ( $\bar{j}(\rho) = j(r)$ ), so folgt

$$\rho^2 \partial_\rho^2 \bar{j} + \rho \partial_\rho \bar{j} - \rho^2 \bar{j} = 0. \quad (11)$$

Dies ist die modifizierte Besselgleichung und hat als einzige reguläre Lösung

$$j(r) = j_0 I_0(r/\lambda). \quad (12)$$

Die Konstante  $j_0$  ist bestimmt durch den Strom  $I$  durch den Draht

$$I = \int d^2 r j(r) \stackrel{\text{Gl. (10)}}{=} 2\pi \lambda^2 \int_0^R dr \partial_r (r \partial_r j(r)) = 2\pi \lambda R j_0 I_0'(R/\lambda). \quad (13)$$

Im Zentrum des Drahtes ist die Stromdichte

$$j(r) = j_0, \quad (14)$$

wohingegen im Fall eines dicken Drahtes es einen Bereich  $r \gg \lambda$  gibt, in dem

$$j(r) \sim j_0 \frac{e^{r/\lambda}}{\sqrt{2\pi r/\lambda}}. \quad (15)$$

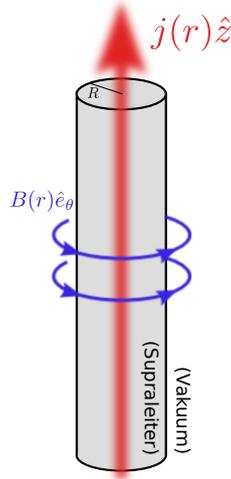


Abbildung 2: Ein stromdurchflossener Draht mit Radius  $R$ .

- (b) Das Magnetfeld außerhalb des Drahtes ist über Gl. (2) vollständig durch den Strom innerhalb des Drahtes bestimmt:

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (16)$$

Es folgt

$$B(r)|_{r \geq R} = \frac{2I}{c} \frac{1}{r}. \quad (17)$$

- (c) Wie in der Aufgabenstellung angegeben, verwenden wir zur Berechnung des kritischen Stromes das *Silsbee*-Kriterium: Wenn das Magnetfeld an der Oberfläche  $B(R)$  den Wert des kritischen Feldes  $H_c$  erreicht, wird der supraleitende Zustand zerstört. Es folgt

$$I_c(R) = \frac{cRH_c}{2}. \quad (18)$$

Oder, äquivalent, für die Stromdichte im Zentrum des Drahtes

$$j_{0,c}(R) = \frac{cH_c}{4\pi\lambda I'_0(R/\lambda)}. \quad (19)$$

- (d) Betrachten wir nun  $N$  parallele Drähte mit Radius  $R/\sqrt{N}$ . Ferner sei der Abstand zwischen den Drähten  $a \gg R/\sqrt{N}$ , sodass bei der Berechnung des kritischen Stromes das Magnetfeld der Nachbardrähte vernachlässigt werden kann.

Der kritische Strom eines einzelnen Drahtes ist also

$$I_c(R/\sqrt{N}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{cRH_c}{2}, \quad (20)$$

und somit kann der Gesamtstrom durch die parallelen supraleitenden Drähte maximal

$$I_c^{\text{tot}} = NI_c(R/\sqrt{N}) = \sqrt{N} \frac{cRH_c}{2} \stackrel{N \gg 1}{\gg} \frac{cRH_c}{2} \quad (21)$$

werden. Es ist also besser viele dünne Drähte mit ausreichend großem Abstand zu haben.

(e) Wir verwenden zur Bestimmung des kritischen Feldes bei Temperatur  $T$  die Formel<sup>1</sup>

$$H_c(T) \approx H_c(T = 0) (1 - T/T_c). \quad (22)$$

Somit ist für den angegebenen Bleidraht

$$H_c(4.2K) = \frac{1000}{3} Oe \quad (23)$$

und folglich

$$I_c = \frac{1}{2} \times 1mm \times \frac{1000}{3} \underbrace{Oe}_{\frac{1000}{4\pi} \frac{A}{m}} = \frac{125}{3\pi} A \approx 13.26A. \quad (24)$$

---

<sup>1</sup>Die lineare Temperatureabhängigkeit ist streng genommen nur gültig für  $T_c - T \ll T_c$ , während für  $T \ll T_c$  gilt  $H_c(T) = H_c(T = 0) (1 - \mathcal{C}(T/T_c)^2)$ , wobei  $\mathcal{C}$  eine Konstante der Größenordnung 1 ist.

### 3. Ginzburg-Landau-Theorie

(6 Punkte)

Betrachten Sie den Ordnungsparameter  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\phi(\mathbf{r})}$  mit  $|\psi(\mathbf{r})| = \psi_0 + \zeta(\mathbf{r})$ .

Analysieren Sie die Erwartungswerte der Fluktuationen  $\langle[\phi(\mathbf{q})]^2\rangle$  und  $\langle[\zeta(\mathbf{q})]^2\rangle$  im Fourier-Raum mit Hilfe der Ginzburg-Landau-Theorie.

#### Lösung:

Betrachten wir das Ginzburg-Landau Funktional

$$\mathcal{F} = \int d^d x \left\{ \frac{|D\psi|^2}{2m^*} + \underbrace{\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4}_{\equiv V(|\psi|)} + \frac{[\nabla \times \mathbf{A}]^2}{8\pi} \right\} \quad (25)$$

in der supraleitenden Phase, sodass  $\psi_0 = \sqrt{-\alpha/\beta}$  das Funktional minimiert. (Hier wurde die kovariante Ableitung  $D = \nabla - i2e\mathbf{A}$  eingeführt.)

In der angegebenen Parametrisierung  $\psi(\mathbf{r}) = (\psi_0 + \zeta(\mathbf{r}))e^{i\phi(\mathbf{r})}$  berechnen wir die Erwartungswerte  $\langle\phi(\mathbf{q})\phi(\mathbf{q}')\rangle$  und  $\langle\zeta(\mathbf{q})\zeta(\mathbf{q}')\rangle$  in linearer Näherung.<sup>2</sup> Das bedeutet, dass wir das Tal des Mexikaner-Hut Potentials mit einer harmonischen Näherung ersetzen, siehe Abb. 3:

$$V(|\psi|) \approx V(\psi_0) + \underbrace{V'(\psi_0)}_{\equiv 0} + \underbrace{\frac{1}{2}V''(\psi_0)}_{=2|\alpha|} \zeta(\mathbf{r})^2. \quad (26)$$

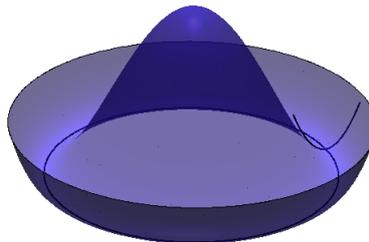


Abbildung 3: Das Mexikaner-Hut Potential  $V(|\psi|)$ . In der linearen Näherung wird das freie Energie Funktional senkrecht zur Grundzustandsmannigfaltigkeit parabolisch angenähert.

Folglich lässt sich das Ginzburg-Landau schreiben als

$$\mathcal{F} = \int d^d x \left\{ \frac{(\nabla\phi - 2e\mathbf{A})^2\psi_0^2}{2m^*} + \frac{(\nabla\zeta)^2}{2m^*} + 2|\alpha|\zeta^2 + \frac{[\nabla \times \mathbf{A}]^2}{8\pi} \right\}. \quad (27)$$

<sup>2</sup>Der Begriff "linear" bezieht sich auf die linearen Bewegungsgleichungen, die aus einer *quadratischen* freien Energie folgen.

**Erwartungswerte der Fluktuationen für ungeladene Teilchen:** Betrachten wir zunächst eine Supraflüssigkeit ungeladener Teilchen, d.h.  $e = 0$ . Im Fourier-Raum lässt sich der Materieteil des Funktionals schreiben als

$$\mathcal{F} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ \phi(\mathbf{q})\phi(-\mathbf{q}) \frac{\psi_0^2 \mathbf{q}^2}{2m^*} + \zeta(\mathbf{q})\zeta(-\mathbf{q}) \left[ \frac{\mathbf{q}^2}{2m^*} + 2|\alpha| \right] \right\}. \quad (28)$$

Wir nehmen beispielsweise periodische Randbedingungen an, sodass  $q_{x,y,z} = 2\pi n/L_{x,y,z}$  diskrete Werte annimmt. Der Grenzfall des thermodynamischen Limes wird unten ebenfalls diskutiert.

Analog zum thermischen Erwartungswert gilt

$$\langle \phi(\mathbf{q})\phi(\mathbf{q}') \rangle = \frac{\text{Tr} [\phi(\mathbf{q})\phi(\mathbf{q}')e^{-\mathcal{F}/T}]}{\text{Tr} [e^{-\mathcal{F}/T}]}. \quad (29)$$

Wie in der statistischen Mechanik beschreibt  $\text{Tr} = \int \prod_{\{\mathbf{k}\}} d\phi(\mathbf{k})$  die Summe (in diesem Fall das Integral) über alle möglichen Werte, die das Feld  $\phi(\mathbf{k})$  an diskreten Positionen im Fourier Raum einnehmen kann.<sup>3</sup>

Mit Hilfe der unten hergeleiteten Identität (36) für Gauß-Integrale folgt also

$$\langle \phi(\mathbf{q})\phi(\mathbf{q}') \rangle = \frac{m_*}{\psi_0^2 \mathbf{q}^2} V \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{q}'} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{m_*}{\psi_0^2 \mathbf{q}^2} (2\pi)^d \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}'). \quad (30)$$

und analog (Korrelationslänge im Supraleiter:  $\xi = 1/\sqrt{4m^*|\alpha|}$ )

$$\langle \zeta(\mathbf{q})\zeta(\mathbf{q}') \rangle = \frac{m_*}{\mathbf{q}^2 + \xi^{-2}} V \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{q}'} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{m_*}{\mathbf{q}^2 + \xi^{-2}} (2\pi)^d \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}'). \quad (31)$$

Physikalische Interpretation:

1. Die Tatsache, dass der Korrelator des Phasenfreiheitsgrades  $\phi$ , Gl. (30), einen Pol bei  $\mathbf{q} = 0$  aufweist, ist eine Manifestation des Goldstone-Theorems. Es besagt, dass bei der spontanen Brechung einer globalen, kontinuierlichen Symmetrie (Symmetriegruppe  $G$ ) zu einer kleineren Symmetriegruppe  $H$  masselose Bosonen auftreten. Die Anzahl solcher Bosonen ist  $\dim G/H$ .
2. Der Korrelator des Freiheitsgrades  $\zeta$  ist unbeeinflusst vom Goldstone-Theorem und beschreibt ein massives Boson. Es ist allerdings eine generische Eigenschaft von Phasenübergängen zweiter Ordnung, dass auch dieser Freiheitsgrad am kritischen Punkt  $\alpha = 0$  masselos ist.

**Erwartungswerte der Fluktuationen für geladene Teilchen:** Betrachten wir nun einen Supraleiter (d.h. eine Supraflüssigkeit geladener Teilchen,  $e \neq 0$ ). Wir wählen die Eichung  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\phi/2e$ . Dann lässt sich das Ginzburg Landau Funktional schreiben als

---

<sup>3</sup>Das Integral im thermodynamischen Limes mit Integralmaß

$$\mathcal{D}\phi = \lim_{TD} \prod_{\{\mathbf{k}\}} d\phi(\mathbf{k})$$

nennt man Funktionalintegral.

$$\mathcal{F} = \int d^d x \left\{ \frac{(2e\mathbf{A}')^2 \psi_0^2}{2m^*} + \frac{(\nabla\zeta)^2}{2m^*} + 2|\alpha|\zeta^2 + \frac{[\nabla \times \mathbf{A}']^2}{8\pi} \right\}. \quad (32)$$

Diesem Funktional lesen wir (mit Hilfe der Formel (36)) folgende Eigenschaften ab:

1. Entgegen dem Fall der Supraflüssigkeit, Gl. (28), tritt der Phasenfreiheitsgrad  $\phi$  nicht im Ginzburg-Landau Funktional (32) auf. Somit sind Fluktuationen des Feldes  $\phi(\mathbf{r})$  keine Niederenergieanregungen des Supraleiters, es gibt keinen Korrelator der Sorte (30). Man spricht davon, dass die Goldstone-Bosonen vom Eichfeld “aufgegessen” worden sind.
2. Dafür tritt der Term  $(2e\mathbf{A}')^2 \psi_0^2 / 2m^*$  im Ginzburg-Landau-Funktional auf. Aufgrund der Formel (36) ist offensichtlich, dass er einen Massenterm im Photonpropagator nach sich zieht. Das Auftreten eines massiven Eichbosons ist nichts anderes als der Meißner Effekt.
3. Der Korrelator (31) des Feldes  $\zeta(\mathbf{r})$  bleibt davon unbeeinflusst. Im Zusammenhang von Eichtheorien wird das Feld  $\zeta(\mathbf{r})$  oft (Anderson-)Higgs-Boson genannt.

**Formelsammlung zu Gauß-Integralen:** Betrachten wir das Integral über die Komponenten des  $N$ -dimensionalen Vektors  $\mathbf{a}$

$$I(\mathbf{b}) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_i (da_i) e^{-\frac{1}{2} \mathbf{a}^T M \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \mathbf{a}}, \quad (33)$$

Wobei  $M$  eine positiv definite, reelle Matrix ist.<sup>4</sup> Ihre Eigenwerte lassen sich in der Diagonalmatrix  $D = O^T M O$  zusammenfassen, wobei  $O$  eine orthogonale Rotationsmatrix ist. Mit der Notation  $\mathbf{a}' = O^T \mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}' = O^T \mathbf{b}$

$$\begin{aligned} I(\mathbf{b}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_i (da'_i) e^{-\frac{1}{2} \sum_i (D_i (a'_i)^2 - 2b'_i a'_i)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_i (da'_i) e^{-\frac{1}{2} \sum_i D_i (a'_i - b'_i / D_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_i (b'_i)^2 / D_i} \\ &= e^{\frac{1}{2} \mathbf{b}'^T M^{-1} \mathbf{b}'} \prod_i \sqrt{\frac{2\pi}{D_i}} = e^{\frac{1}{2} \mathbf{b}^T M^{-1} \mathbf{b}} \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det(M)}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Betrachten wir nun den folgenden statistischen Erwartungswert:

$$\langle a_i a_j \rangle \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_i (da_i) a_i a_j e^{-\frac{1}{2} \mathbf{a}^T M \mathbf{a}}}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_i (da_i) e^{-\frac{1}{2} \mathbf{a}^T M \mathbf{a}}}. \quad (35)$$

Er lässt sich einfach mit Hilfe des generierenden Integrals  $I(\mathbf{b})$  berechnen

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j \rangle &\stackrel{\text{Gl. (33)}}{=} \frac{1}{I(0)} \left. \frac{\partial^2}{\partial b_i \partial b_j} I(\mathbf{b}) \right|_{\mathbf{b}=0} \\ &\stackrel{\text{Gl. (34)}}{=} (M^{-1})_{ij}. \end{aligned} \quad (36)$$

<sup>4</sup>Es ist offensichtlich, dass nur der symmetrische Anteil von  $M$  relevant ist.