

## Theorie der Kondensierten Materie I WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Mirlin, Dr. I. Gornyi  
U. Briskot, N. Kainaris, Dr. E. KönigBlatt 4: Lösungen  
Besprechung 20.11.2014

## 1. Bloch-Oszillationen

(8+2=10 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Bloch-Oszillationen mit Dämpfung (in  $d = 1$ ):

$$\begin{aligned}\hbar v &= \frac{\partial \epsilon(k)}{\partial k}, \\ \hbar \frac{dk}{dt} &= -eE - \gamma v, \\ \epsilon(k) &= -2W \cos(ka).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Dämpfung ( $\gamma \neq 0$ ) zu einer stationären Lösung führen kann. Bestimmen und skizzieren Sie  $x(t)$  für schwache und starke Dämpfung. Welche Bedingung unterscheidet diese Fälle?

*Lösung:*

Aus den Bewegungsgleichungen

$$\hbar \frac{dk}{dt} = -eE - \gamma \frac{dx}{dt}, \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{2Wa}{\hbar} \sin(ka), \quad (2)$$

folgt mit der Notation

$$q := ka, \quad \alpha := -\frac{eEa}{\hbar}, \quad \beta := -\frac{2Wa^2\gamma}{\hbar^2}. \quad (3)$$

die Gleichung

$$\frac{dq}{dt} = \alpha + \beta \sin(q). \quad (4)$$

Es folgen also zwei qualitativ unterschiedliche Fälle

- (i)  $|\alpha| > |\beta|$ : Schwache Dämpfung, es gibt keine Lösung  $dk/dt = 0$ .
- (ii)  $|\alpha| < |\beta|$ : Starke Dämpfung, es gibt zwei Lösungen mit  $dk/dt = 0$ , bestimmt durch  $\sin(q_*) = -\alpha/\beta$ . Davon ist eine attraktiv und eine repulsiv.

Für die Lösung der Gln. (4) verwenden wir die Zerlegung der Veränderlichen

$$\frac{dq}{\alpha + \beta \sin(q)} = dt, \quad (5)$$

$$\int_{q_0}^q \frac{dQ}{\alpha + \beta \sin(Q)} = (t - t_0), \quad (6)$$

wobei  $q_0 = q(t_0)$  und  $t_0 = 0$  ist. Um das Integral zu berechnen führen wir nachstehende Substitution durch

$$S := \tan(Q/2), \quad (7)$$

$$dS = \frac{dQ}{2 \cos^2(Q/2)}, \quad (8)$$

und verwenden weiter, dass

$$\cos^2(Q/2) = \frac{1}{1 + S^2} \quad (9)$$

denn

$$\sin(Q) = 2 \sin(Q/2) \cos(Q/2) = 2 \tan(Q/2) \cos^2(Q/2), \quad (10)$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1 - \cos^2(Q/2)}{\cos^2(Q/2)}. \quad (11)$$

Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned} \int_{q_0}^q \frac{dQ}{\alpha + \beta \sin(Q)} &= \int_{s_0}^s \frac{2 \cos^2(Q(S)/2) dS}{\alpha + 2\beta \cos^2(Q(S)/2) S} = 2 \int_{s_0}^s \frac{dS}{\alpha(1 + S^2) + 2\beta S} \\ &= 2\alpha \int_{s_0}^s \frac{dS}{\alpha^2 - \beta^2 + (\beta + \alpha S)^2} = 2 \int_{\tilde{s}_0}^{\tilde{s}} \frac{d\tilde{S}}{\alpha^2 - \beta^2 + \tilde{S}^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

wobei  $\tilde{s} = \alpha \tan(q/2) + \beta$  und  $\tilde{s}_0 = \alpha \tan(q_0/2) + \beta$ . Für die weitere Lösung des Integrals müssen obenstehende Fälle separat diskutiert werden.

Fall (i):  $\alpha^2 > \beta^2$

Integration liefert

$$t = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \left[ \arctan \left( \frac{\alpha \tan(q/2) + \beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right) - \arctan \left( \frac{\alpha \tan(q_0/2) + \beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right) \right]. \quad (13)$$

Unter der Annahme  $q_0 = 0$  folgt

$$q(t) = 2 \arctan \left[ \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} \tan \left( \frac{(t - t_{q_0}) \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2} \right) - \frac{\beta}{\alpha} \right]. \quad (14)$$

Hier ist

$$t_{q_0} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \arctan \left( \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right). \quad (15)$$

Beachten Sie, dass für  $\beta \rightarrow 0$  (keine Dämpfung)  $q = t\alpha = teEa/\hbar$  folgt. Aufgrund des Zusammenhangs

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\hbar|\beta|}{\gamma a} \sin(q), \quad (16)$$

führt dies zu den zelebrierten Bloch Oszillationen. Für  $0 < \beta^2 \ll \alpha^2$  lässt sich das Ergebnis der Elektronposition entwickeln:

$$x(t) \simeq \frac{\hbar\beta}{a\gamma} \left[ -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha t - \frac{\beta}{\alpha^2} \left\{ \frac{\alpha t}{2} + \frac{\sin 2\alpha t}{4} - \sin \alpha t \right\} \right] + x_0. \quad (17)$$

Abbildung 1: Oszillatorisches Verhalten der Elektronenposition im Grenzfall ohne Dämpfung (Blau  $\beta/\alpha = 0$ ) und schwacher Dämpfung (Violett:  $|\beta/\alpha| = 0.1$ ).

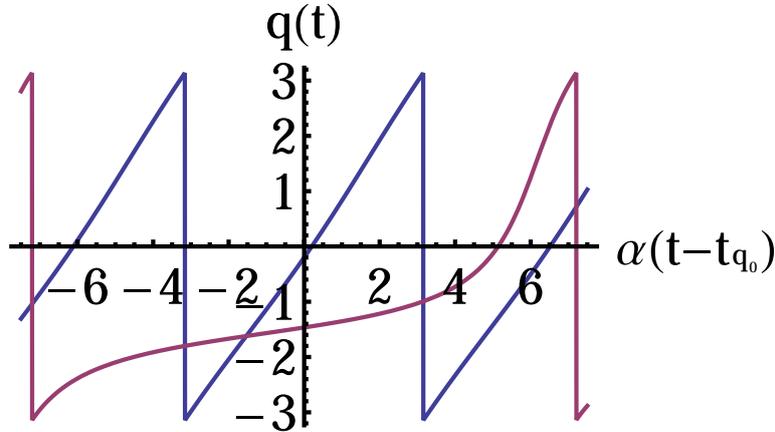


Abbildung 2: Oszillatorisches Verhalten des Wellenvektors im Fall (i) schwacher Dämpfung, s. Gl. (14). Blau:  $|\beta/\alpha| = 0.1$ . Violett:  $|\beta/\alpha| = 0.9$

Dieses Verhalten ist in Abb. 1 dargestellt. Im allgemeinen Fall  $0 < \beta^2 < \alpha^2$  bleibt das Oszillatorische Verhalten bestehen, wobei die Umlaufzeit durch die Brilluoinzone mit steigender Dämpfung ansteigt und im Limes  $\beta \rightarrow \alpha$  divergiert, s. Abb. 2.

Fall (i):  $\alpha^2 > \beta^2$  In diesem Fall liefert die Integration

$$t = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \left[ \ln \left| \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - \alpha \tan(Q/2) - \beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \alpha \tan(Q/2) + \beta} \right| \right]_{Q=q_0}^{Q=q(t)}. \quad (18)$$

Je nach Vorzeichen des Arguments des Betrags ergeben sich zwei Lösungen (wir betrachten hier den physikalischen relevanten Fall  $\beta < 0, \alpha > 0$ )

$$q_1(t) = 2 \arctan \left[ -\frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\alpha} \tanh \left( \frac{(t - t_{q_0})\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{2} \right) - \frac{\beta}{\alpha} \right], \quad (19a)$$

$$q_2(t) = 2 \arctan \left[ -\frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\alpha} \coth \left( \frac{(t - t_{q_0})\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{2} \right) - \frac{\beta}{\alpha} \right]. \quad (19b)$$

wobei

$$t_{q_0} = \frac{-1}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - \alpha \tan(q_0/2) - \beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \alpha \tan(q_0/2) + \beta} \right|. \quad (20)$$

Beide Lösungen konvergieren gegen die stabile Lösung der Gl. (4)

$$q_{1,2}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 2 \arctan \left[ -\frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right] = 2 \arctan \left[ \frac{1 - \cos q_*}{\sin q_*} \right] = q_*, \quad (21)$$

$$\sin(q_*) = -\alpha/\beta. \quad (22)$$

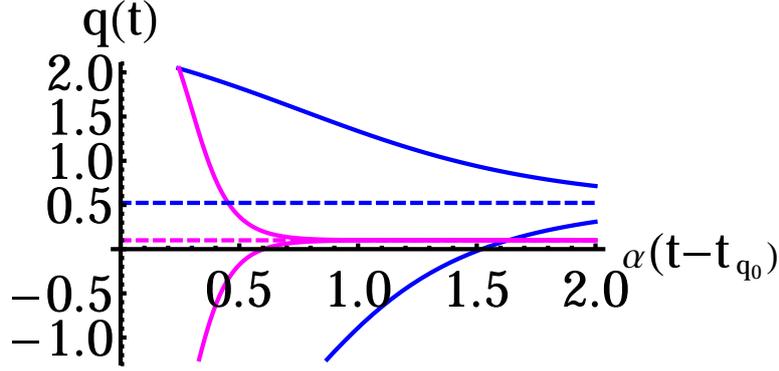


Abbildung 3: Überdämpftes Verhalten des Wellenvektors im Fall (ii) starker Dämpfung, s. Gl. (19). Blau:  $\beta/\alpha = -2$ . Rosa:  $\beta/\alpha = -10$ . Das asymptotische Verhalten  $q \rightarrow q_*$  ist durch gestrichelte Linien dargestellt. Trajektorien gemäß Gl. (19a) [Gl. (19b)] nähern sich diesem Grenzwert von oben [unten].

Je nach Anfangsbedingung verfolgt das System die Trajektorie gemäß Gl. (19a) (im Fall  $q_0 > q_*$ ) respektive (19b) (im Fall  $q_0 < q_*$ ), dies ist in Abb. 3 ersichtlich.

Betrachten wir nun die Situation  $\beta^2 \gg \alpha^2$ . Der Grenzimpuls  $q_*$  wird in etwa zur Zeit

$$t - t_{q_0} \sim \frac{2 \ln |\beta/\alpha|}{|\beta|}$$

erreicht. Somit ergibt sich die Position

$$x(t) \simeq \frac{\hbar|\beta|t}{\gamma a} \sin(q_*) = \frac{\hbar\alpha}{\gamma a} t = -\frac{eE}{\gamma} t, \quad t \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Im Fall einer Trajektorie gemäß Gl. (19b) gelangt das System über eine einzelne Oszillationsbewegung zur Lösung (23).

Das überdämpfte Verhalten des Wellenvektors ist in Abb. 3 dargestellt.

- (b) Zeigen Sie, dass in normalen Metallen (typische Gitterkonstante  $\approx 1\text{\AA}$  und Relaxationszeiten  $\approx 10^{-14}$  s) Bloch-Oszillationen schwierig zu beobachten sind.

*Lösung:*

Vergleichen wir die Oszillationsfrequenz  $\omega = \alpha = eEa/\hbar$  mit der Streurrate  $1/\tau$ . Um zumindest eine Oszillationsperiode beobachten zu können fordern wir

$$1 \lesssim \omega\tau = eEa\tau/\hbar. \quad (24)$$

Beachten Sie, dass für das Kosinusband aus Aufgabenteil a) in der Nähe der Bandkante gilt  $m = (2Wa^2/\hbar^2)^{-1}$  und  $\gamma = m/\tau$ . In diesem Grenzfall ist  $\omega\tau = |\alpha/\beta|$  und somit die Bedingung (24) identisch mit der Bedingung für Fall (i) aus Aufgabenteil a).

Umformen führt zu

$$E \gtrsim 10^8 V/m, \quad (25)$$

also einem beträchtlichen elektrischen Feld. Auf atomarer Skala entspricht dies einer Energie von  $eEa \sim 10meV$ . Da diese Energien durchaus mit der Energie der

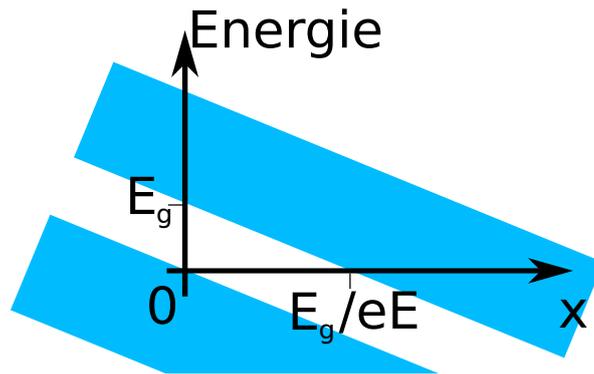


Abbildung 4: Geometrische Darstellung des Zenerübergangs. Die Bandlücke ist  $E_g$ , hingegen ist  $E$  das angelegte elektrische Feld.

Bandlücken verglichen werden kann, können Interbandanregungen die Blochoszillationen maskieren. Eine genauere Abschätzung für die Tunnelwahrscheinlichkeit  $P$  ist wie folgt. Das Potential für einen Zener Übergang lässt sich mit  $V(x) = E(\frac{E_g}{eE} - x)$  abschätzen, siehe Abb. 4. Somit ist ( $m$  ist die effektive Masse der Elektronen)

$$P = \exp\left[-\int_0^{\frac{E_g}{eE}} \sqrt{2m e V(x)} dx / \hbar\right] = \exp\left[-\frac{\sqrt{2m E_g E_g} \frac{2}{3}}{e E \hbar}\right] \quad (26)$$

Somit ergibt sich für die minimale Bandlücke um Übergänge zu vermeiden

$$E_g^{(\min)} = \left(\frac{3eE\hbar}{2\sqrt{2m}}\right)^{2/3}. \quad (27)$$

Für  $E \sim 10^8 \text{V/m}$  folgt mit  $m = m_e$ , d.h. mit der Masse freier Elektronen, der Wert  $E_g^{(\min)} \sim 0.1 \text{eV}$ .

Abschließend sei noch auf die technischen Probleme bei der Erzeugung eines elektrischen Feldes innerhalb des Volumens eines Metalls hingewiesen. Bringt man eine Probe in ein externes Feld, so führt innerhalb kürzester Zeit (innerhalb von  $\tau$ ) die Umverteilung der Ladungen zur Abschirmung des Feldes im Inneren der Probe. Um diesen Effekt zu Umgehen muss man entweder ein dynamisches Feld anlegen, oder die Probe direkt kontaktieren.

- (c) Was würde sich in Halbleiterübergittern ändern? (5 Bonuspunkte)

*Lösung:*

In Halbleiterübergittern lassen sich künstlich Gitterstrukturen mit viel größeren Gitterkonstanten herstellen. Ferner sind sie vergleichsweise reiner und in der Summe sind die benötigten elektrischen Feldstärken geringer.

*Weitere Informationen / Literatur:*

<http://en.wikipedia.org/wiki/Superlattice>

Physical Review B **33**, 5494(1986), Physical Review Letters **70**, 3319 (1993), Physics Today **46**(6), 34 (1993), Physical Review Letters **76**, 4508 (1996), Physics Reports **357**, 1 (2002), Physical Review Letters **100**, 080404 (2008), Physical Review Letters **100**, 080405 (2008), Physical Review Letters **107**, 186406 (2011).

## 2. Bloch-Elektronen im Magnetfeld

(6+6+8=20 Punkte)

- (a) Nehmen Sie an, dass sich das Spektrum  $\epsilon(\mathbf{k})$  in der Nähe eines lokalen Minimums als

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \epsilon_0 + \frac{\hbar^2}{2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)_i \left( \frac{1}{\hat{m}^*} \right)_{ij} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)_j, \quad i, j = x, y, z$$

schreiben lässt, wobei die Matrix (der Tensor der effektiven Masse)  $m_{ij}^*$  unabhängig von  $\mathbf{k}$  ist. Bestimmen Sie die effektive Zyklotronmasse  $m_c^*$ .

*Lösung:*

Die Effektive Masse lässt sich als Energieableitung der Fläche  $S$  schreiben, die Elektronen im  $\mathbf{k}$ -Raum umlaufen

$$m_c^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S(E, k_z)}{\partial E}. \quad (28)$$

Nehmen wir zunächst an, dass das magnetische Feld in z-Richtung zeigt. Somit ist

$$S = S(E, k_z) = \int dk_x dk_y \theta(E - \epsilon(\mathbf{k})). \quad (29)$$

Folglich ist

$$m_c^* = 2\pi\nu(E, k_z), \quad (30)$$

wobei  $\nu(E, k_z)$  die Zustandsdichte der 2D Dispersionsrelation  $\epsilon(\mathbf{k}) = \epsilon(k_x, k_y, k_z)$  bei festem  $k_z$  ist.

Es gilt

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \underline{\alpha} \mathbf{k} + \mathbf{b} \mathbf{k} + \text{const.} \quad (31)$$

wobei  $\mathbf{b}$  und die Konstante von  $k_z$  abhängen und die folgende Matrix eingeführt wurde:

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} ((\hat{m}^*)^{-1})_{xx} & ((\hat{m}^*)^{-1})_{xy} \\ ((\hat{m}^*)^{-1})_{yx} & ((\hat{m}^*)^{-1})_{yy} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Wir betrachten  $(\hat{m}^*)^{-1}$  als Matrixinverses der Massenmatrix. Für diese Dispersionsrelation ist die Zustandsdichte

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \int (dk) \delta(E - \epsilon(\mathbf{k})) \\ &\stackrel{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} - \underline{\alpha}^{-1} \mathbf{b}}{=} \int (dk) \delta(\epsilon + \text{const.} - \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \underline{\alpha} \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (33)$$

Der Ausdruck  $\mathbf{k}^T \underline{\alpha} \mathbf{k}$  in der Deltafunktion lässt sich durch Diagonalisieren und reskalieren vereinfachen:

$$\mathbf{k}^T \underline{\alpha} \mathbf{k} = \sum_i \alpha_i k_i^2 = \sum_i (\sqrt{\alpha_i} k_i)^2. \quad (34)$$

Durch die Jacobideterminante folgt also

$$\nu(E) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|\det \alpha|}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\det \hat{m}^*}{\hat{m}_{zz}^*}}. \quad (35)$$

Die letzte Gleichung lässt sich durch die allgemeine Formel für die Inversion einer 3x3 Matrix  $\hat{m} = (\vec{m}_{\bullet,x}, \vec{m}_{\bullet,y}, \vec{m}_{\bullet,z})$  zeigen:

$$\hat{m}^{-1} = \frac{1}{\det \hat{m}} \begin{pmatrix} (\vec{m}_{\bullet,y} \times \vec{m}_{\bullet,z})^T \\ (\vec{m}_{\bullet,z} \times \vec{m}_{\bullet,x})^T \\ (\vec{m}_{\bullet,x} \times \vec{m}_{\bullet,y})^T \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Für eine beliebige Orientierung des magnetischen Feldes  $\vec{B} = B\hat{e}_B$  folgt also die Zyklotronmasse

$$m_c^* = \sqrt{\frac{\det \hat{m}^*}{\hat{e}_B^T \hat{m}^* \hat{e}_B}}. \quad (37)$$

(b) Betrachten Sie das Spektrum

$$\epsilon(\mathbf{k}) = -2W [\cos(ak_x) + \cos(ak_y) + \cos(ak_z)]$$

und nehmen Sie an, dass sich ein Elektron in der Nähe des Bandminimums in einem oszillierenden elektrischen Feld  $\mathbf{E} = E_x \hat{x} \exp(-i\omega t)$  und in einem konstanten Magnetfeld  $\mathbf{B} = -B\hat{z}$  bewegt. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  des Elektrons.

*Lösung:*

In der Vorlesung wurde folgende quasi-klassische Bewegungsgleichung hergeleitet:

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - e\mathbf{E}$$

Wir hatten ein oszillierendes elektrisches Feld  $\mathbf{E} = \hat{x}E_x(t) = \hat{x}E_x \exp(-i\omega t)$  und ein konstantes magnetisches Feld  $\mathbf{B} = -B\hat{z}$  angenommen.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (-v_y B, v_x B, 0)^T.$$

Mit diesen Voraussetzungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{k}_x &= m\dot{v}_x = -eE_x(t) + \frac{e}{c}v_y B \\ \dot{k}_y &= m\dot{v}_y = -\frac{e}{c}v_x B \\ \dot{k}_z &= 0 \end{aligned}$$

Da für die folgende Rechnung nur noch die Geschwindigkeitskomponenten in der  $x$ - $y$ -Ebene relevant sind, wählen wir den Ansatz  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v} \exp(-i\omega t)$  mit  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T$ . Wir finden das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -i\omega m v_x &= -eE_x + \frac{e}{c}v_y B \\ -i\omega m v_y &= -\frac{e}{c}v_x B. \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen führt zur sogenannten Zyklotron-Resonanz,

$$i(\omega - \omega_c) v = \frac{e}{m} E_x, \quad \omega_c = \frac{eB}{mc}.$$

mit der "komplexen" Geschwindigkeit  $v = v_x + iv_y$ .

Wenn  $\omega \rightarrow \omega_c$ , wird die Amplitude der Geschwindigkeit immer größer. Das bedeutet, dass das Elektron die Energie des elektrischen Feldes absorbiert.

(c) Betrachten Sie nun ein zwei-dimensionales anisotropes Gitter mit dem Spektrum

$$\epsilon(\mathbf{k}) = A_1 \cos(k_x a_x) + A_2 \cos(k_y a_y)$$

in einem konstanten Magnetfeld  $\mathbf{B} = -B\hat{z}$ . Bestimmen Sie den Energiebereich für offene Bandkurven. Skizzieren Sie die Bandkurven im  $k$ -Raum für  $A_1 = A_2$  und für  $A_1 \neq A_2$ . Skizzieren Sie die Zyklotronfrequenz  $\omega_c$  als Funktion der Energie.

*Lösung:*

In Abbildung 5 sind die Äquipotentiallinien (die Bahnkurven) des Problems dargestellt. Im isotropen Fall sind alle Bahnkurven, außer bei  $E = 0$ , geschlossen. Bei endlicher Anisotropie gibt es elliptische Bahnen um  $\mathbf{k} = 0$  und  $\mathbf{k}a = (\pi, \pi)$ . Für Energien  $E \rightarrow \pm|A_1 - A_2|$  divergiert die Zyklotronperiode  $T_c = 1/\omega_c$ . Im Intervall

$$E \in [-|A_1 - A_2|, |A_1 - A_2|]$$

sind die Bahnkurven offen.

Um ein qualitatives Verständnis der Divergenzen (s. Abb. 6) zu erlangen betrachten wir die Bewegungsgleichungen

$$\frac{dp_x}{dt} = \dot{p}_x = -\alpha_y \sin p_y, \quad (38a)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = \dot{p}_y = \alpha_x \sin p_x. \quad (38b)$$

Hierbei ist  $p_i = (k_i a_i)$  und  $\alpha_x = (eB/c)A_x a_x a_y$ ,  $\alpha_y = (eB/c)A_y a_x a_y$ . Ableitung der beiden Bewegungsgleichungen führt zu

$$\ddot{p}_x = -\alpha_y \alpha_x \cos p_y \sin p_x, \quad (39a)$$

$$\ddot{p}_y = -\alpha_y \alpha_x \cos p_x \sin p_y. \quad (39b)$$

Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen führt zu Bewegungsgleichungen für die transformierten Koordinaten  $p_{\pm} = p_x \pm p_y$  (Transformation: 45 Grad Rotation und  $\sqrt{2}$  Streckung)

$$\ddot{p}_+ = -\alpha_y \alpha_x \sin p_+, \quad (40a)$$

$$\ddot{p}_- = -\alpha_y \alpha_x \cos p_-. \quad (40b)$$

Diese beiden entkoppelten Bewegungsgleichungen entsprechen jeweils dem mathematischen Pendel. Die Periodendauer des Pendels divergiert logarithmisch, wenn es kopfüber steht. (Die allgemeine Lösung der Periodendauer ist  $T \propto K(\sin \theta_0/2)$  wobei  $K$  das vollständige elliptische Integral erster Art ist und  $\theta_0$  der Winkel maximaler Auslenkung.)

Folglich gibt es keine Zyklotronbewegung für  $p_+ = \pm\pi$  oder  $p_- = \pm\pi$ . Impulse, die dieser Bedingung genügen sind in Abb. 5 durch die rot gestrichelte Linien dargestellt. Ferner wissen wir, dass sich die Elektronen auf Äquipotentiallinien im  $\mathbf{k}$ -Raum bewegen. Folglich sind alle Bahnen, deren Äquipotentiallinien die roten Linien schneiden, offen.

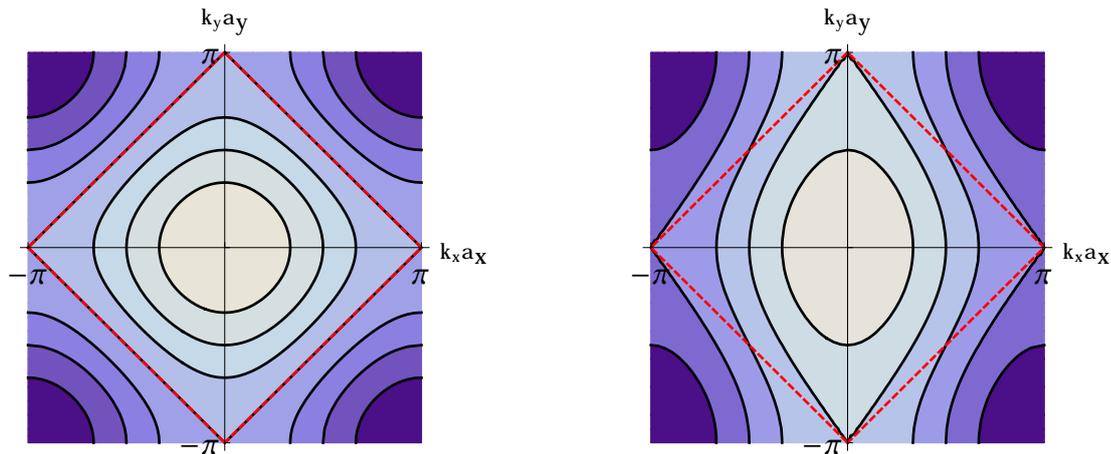


Abbildung 5: Äquipotentiallinien für das isotrope Gitter (links,  $A_2 = A_1$ ) und das anisotrope Gitter (rechts,  $A_2 = A_1/2$ ). Die Impulse, die einem kopfüber stehenden mathematischen Pendel entsprechen, s.Gln. (40), sind durch die roten Linien markiert.

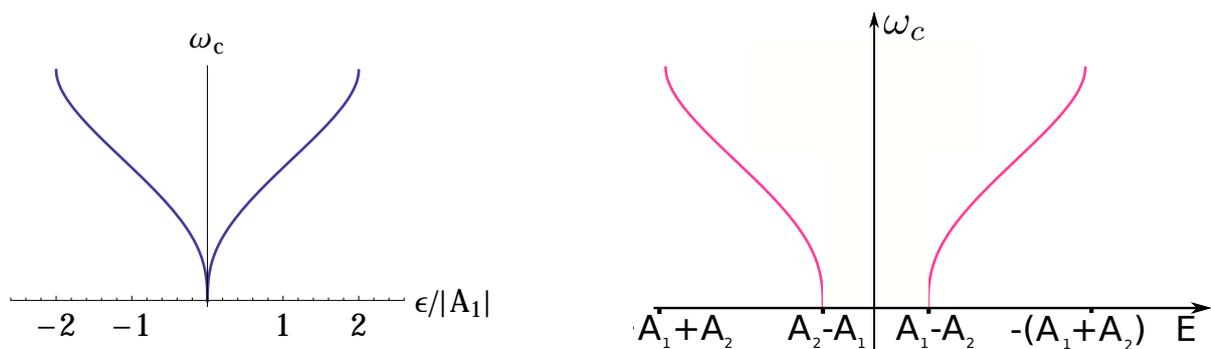


Abbildung 6: Zyklotronfrequenz als Funktion der Energie. Links (exakt gemäß Blatt 5, Aufgabe 1) für das isotrope Gitter, rechts (schematisch) für das anisotrope Gitter.

Ein quantitatives Verständnis war nicht in der Aufgabenstellung gefragt, wird aber im folgenden Teil der Lösung behandelt. Man erhält es durch den Zusammenhang (30) aus Aufgabenteil a)

$$\omega_c = \frac{eB}{cm_c^*} = \frac{eB}{2\pi c\nu(E)}. \quad (41)$$

Die Zustandsdichte für das isotrope System wird in Blatt 5, Aufgabe 1 hergeleitet. Die van-Hove Singularität bei  $E = 0$  ist verantwortlich für das Verschwinden der Zyklotronfrequenz.