Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Mirlin, Dr. I. Gornyi
U. Briskot, N. Kainaris, Dr. E. König

Blatt 5: Lösungen
Besprechung 27.11.2014

---

1. Van Hove-Singularität (4+7=11 Punkte)

Betrachten Sie das "Tight-Binding"-Modell auf dem quadratischen Gitter in zwei Dimensionen. Das Gitter besteht hier nur aus einem Atom pro Einheitszelle. Berücksichtigen Sie ausschließlich das Hüpfen über benachbarte Gitterplätze.

(a) Drücken Sie die Zustandsdichte des Modells exakt (d.h. ohne jegliche Näherung) durch das vollständige elliptische Integral erster Art aus.

Lösung:

Das Energiespektrum ist gegeben durch

$$E(\mathbf{k}) = -2t(\cos k_x + \cos k_y).$$

Die Zustandsdichte ist allgemein definiert als

$$\nu(\epsilon) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\epsilon - E(\mathbf{k})) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x \int_{-\pi}^{\pi} dk_y \delta(\epsilon - E(\mathbf{k})).$$

Wir führen die folgende Variablensubstitution durch,

$$z_1 = \cos k_x, \quad \Rightarrow \quad dz_1 = -\sin k_x dk_x, \quad \Rightarrow \quad dk_x = -\frac{dz_1}{\sqrt{1-z_1^2}}.$$

Mit der Relation

$$\int_{-\pi}^{\pi} dk_x f(\cos k_x) = 2\int_{0}^{\pi} dk_x f(\cos k_x) = 2\int_{-1}^{1} \frac{dz_1}{\sqrt{1-z_1^2}} f(z_1),$$

erhalten wir dann,

$$\nu(\epsilon) = \frac{1}{\hbar^2\pi^2} \int_{-1}^{1} \frac{dz_1}{\sqrt{1-z_1^2}} \int_{-1}^{1} \frac{dz_2}{\sqrt{1-z_2^2}}\, \delta\left(\epsilon + 2t(z_1+z_2)\right),$$

$$\nu(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2\hbar^2 t} \int_{-1}^{1} \frac{dz_1}{\sqrt{1-z_1^2}} \int_{-1}^{1} \frac{dz_2}{\sqrt{1-z_2^2}} \delta\left(\tilde{\epsilon} + z_1 + z_2\right), \quad \tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2t}. \tag{1}$$

Offensichtlich verschwindet die Zustandsdichte außerhalb des Bandes, d.h. für $|\varepsilon| > 2t$ bzw. $|\tilde{\varepsilon}| > 1$. Wir betrachten zunächst den Fall $\tilde{\varepsilon} > 0$ und $\tilde{\varepsilon} < 1$, gemäß Abb. 1b).

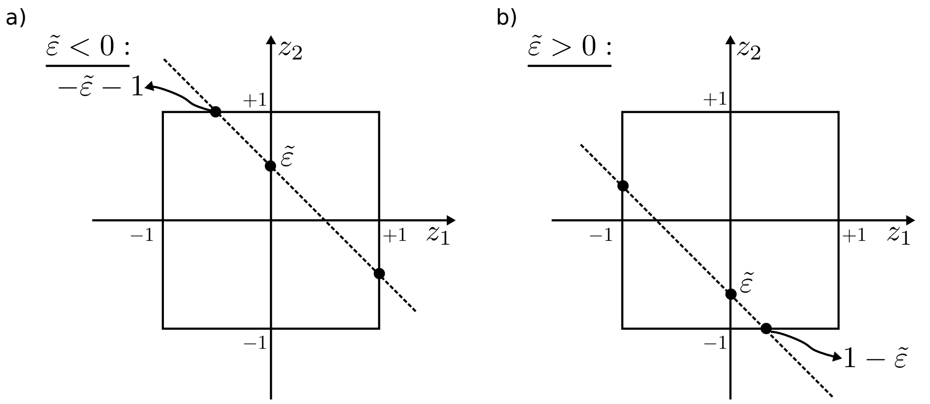

Abbildung 1: Das Integrationsgebiet in Gl. (1) und die Gerade, welche die Nullstellen der δ-Funktion darstellt. Je nach Vorzeichen von $\tilde{\varepsilon}$ müssen die Grenzen für die verbleibende z_1-Integration gewählt werden.

Für die exakte Zustandsdichte (1) erhalten wir dann,

$$\nu(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2\hbar^2 t} \int_{-1}^{1-\tilde{\epsilon}} \frac{dz_1}{\sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-(z_1+\tilde{\epsilon})^2}} \,. \tag{2}$$

Wir transformieren die Variablen gemäß $\bar{z}_1 = z_1 + \tilde{\varepsilon}/2$. Den Nenner schreiben wir dann als,

$$(1-z_1^2)(1-(\tilde{\varepsilon}-z_1)^2) = [(1-\tilde{\varepsilon}/2)^2 - \bar{z}_1^2][(1+\tilde{\varepsilon}/2)^2 - \bar{z}_1^2] \,. \tag{3}$$

sodass,

$$\nu(\epsilon) = \frac{1}{\pi^2\hbar^2 t} \int_{0}^{1-\tilde{\epsilon}/2} \frac{d\bar{z}_1}{\sqrt{[(1-\tilde{\varepsilon}/2)^2 - \bar{z}_1^2][(1+\tilde{\varepsilon}/2)^2 - \bar{z}_1^2]}} \,. \tag{4}$$

Das letzte Integral ist,

$$\nu(\epsilon) = \frac{1}{\pi^2\hbar^2 t}\frac{1}{1+\tilde{\varepsilon}/2} K(a) \,, \tag{5}$$

wobei $a = (1-\tilde{\varepsilon}/2)/(1+\tilde{\varepsilon}/2)$ und $K(k)$ ist das vollständige elliptische Integral erster Art. Das Resultat für $\varepsilon < 0$ erhält man durch $\varepsilon \to -\varepsilon$. Mit der Identität

$$K(\sqrt{1-k^2}) = \frac{2}{1+k} K\left(\frac{1-k}{1+k}\right) \,, \tag{6}$$

erhalten wir schließlich

$$\nu(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2\hbar^2 t} K\left(\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{16t^2}}\right) . \tag{7}$$

(b) Welche Punkte in der Brillouin-Zone können die van Hove-Singularität verursachen? Entwickeln Sie das Energiespektrum in der Region der Brillouin-Zone, die für die Singularität verantwortlich ist. Berechnen Sie das asymptotische Verhalten der Zustandsdichte. Skizzieren Sie die Zustandsdichte.

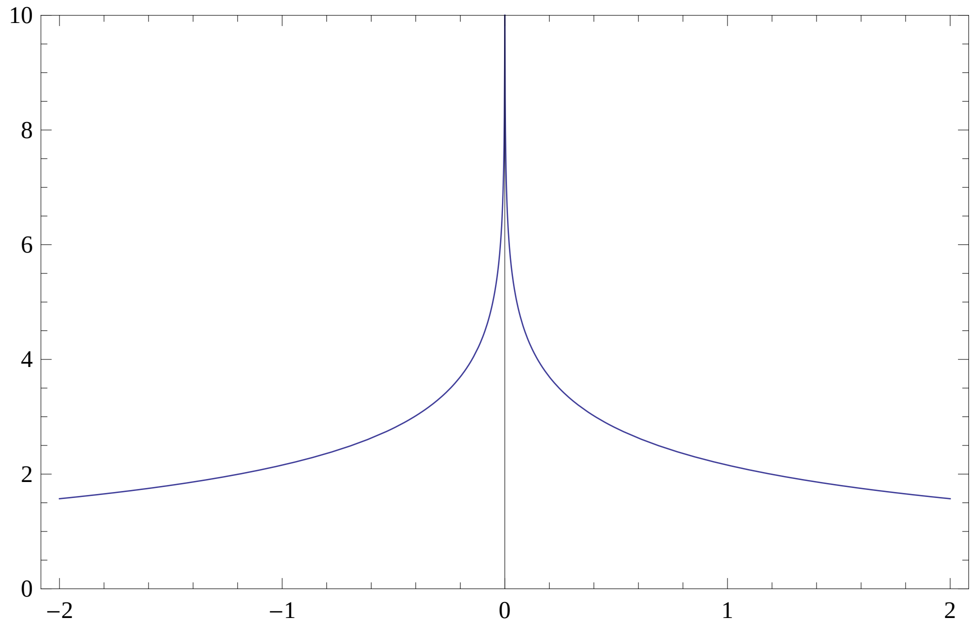

Abbildung 2: Die exakte Zustandsdichte des Quadratgitters, Gl. (7).

Lösung: Der Singularitätspunkt sind $k_x = 0$, $k_y = \pi$ bei denen $E(0, \pi) = 0$. Das Energiespektrum nahe der Singularitätspunkte ist gegeben durch

$$E(\mathbf{k}) \approx t(k_x^2 - \tilde{k}_y^2), \quad \tilde{k}_y = k_y - \pi.$$

Die Zustandsdichte bis zu logarithmischer Genauigkeit ist damit,

$$\nu(\epsilon) \approx \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int dk_x d\tilde{k}_y \delta\left(\epsilon - tk_x^2 + t\tilde{k}_y^2\right) = \frac{1}{4\pi^2\hbar^2 t} \int \frac{d\tilde{k}_y}{\sqrt{2\tilde{\epsilon} + \tilde{k}_y^2}} \to \frac{1}{4\pi^2\hbar^2 t} \ln\frac{t}{\epsilon}.$$

Die notwendige Bedingung für das Auftreten der Singularitätspunkte ist das Verschwinden der Gruppengeschwindigkeit. D.h. es gilt

$$\left.\frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial k_x}\right|_{k_x=0} = \left.\frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial k_y}\right|_{k_y=\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_k E(\mathbf{k})\Big|_{(0,\pi)} = 0.$$

Die exakte Zustandsdichte ist in Abb.2 dargestellt.

2. Van Hove-Singularität in Graphen (2+2+6=10 Punkte)

(a) Ausgehend von dem “Tight-Binding”-Modell in der nächsten-Nachbarn-Näherung (s. Übungsblatt 3), leiten Sie den allgemeinen Ausdruck für die Zustandsdichte in Graphen her.

Lösung: Die Zustandsdichte in Graphen ist allgemein gegeben durch (hierbei setzen wir die Gitterkonstante $a = 1$),

$$E_\pm(\mathbf{k}) = \pm t\sqrt{3 + 4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_y \cos\frac{3}{2}k_x + 2\cos\sqrt{3}k_y}, \quad v = \frac{3t}{2},$$

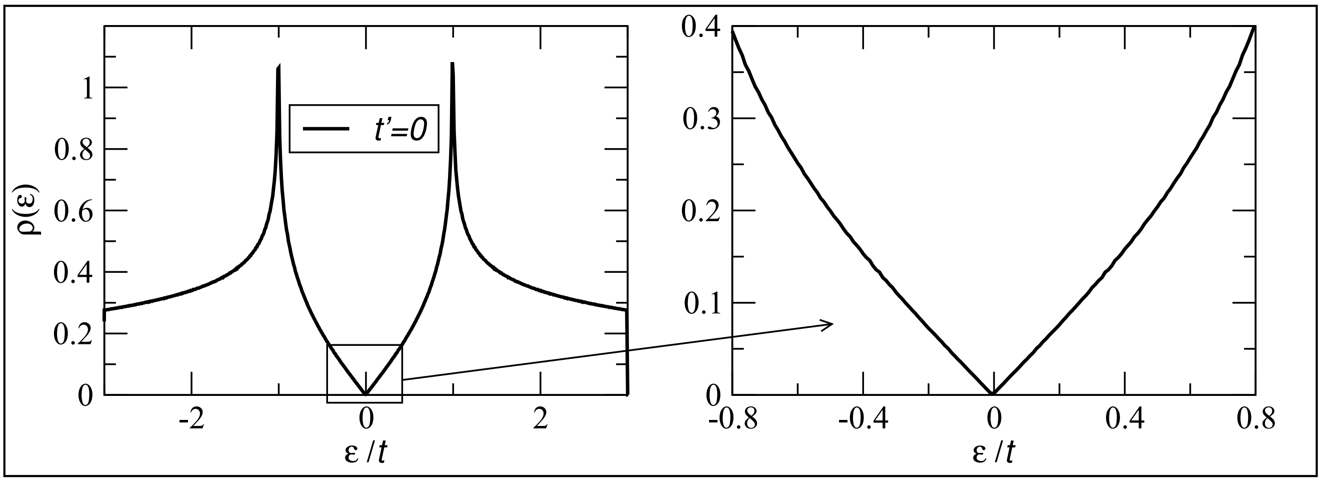

Abbildung 3: Die Zustandsdichte in Graphen.

$$\nu(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{BZ} d^2k\, \delta(\epsilon - E(\mathbf{k}))$$

* Das Integral kann man auch exakt berechnen:

$$\nu(\epsilon) = \frac{4|\epsilon|}{\pi^2\hbar^2 t^2}\frac{1}{\sqrt{Z_0}}K\left(\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}\right),$$

$$Z_0 = \begin{cases} (1+|\epsilon|/t)^2 - (\epsilon^2/t^2-1)^2/4, & |\epsilon| < t \\ 4|\epsilon|/t, & t < |\epsilon| < 3t \end{cases},$$

$$Z_1 = \begin{cases} 4|\epsilon|/t, & |\epsilon| < t \\ (1+|\epsilon|/t)^2 - (\epsilon^2/t^2-1)^2/4, & t < |\epsilon| < 3t \end{cases}.$$

(b) Bestimmen Sie die Zustandsdichte in Graphen in der Nähe der K-Punkte in der Brillouin-Zone (wobei die Bandlücke verschwindet).

Wir nähern die Dispersionsrelation nahe der Dirac-Punkte, wo $E_{\pm,k} \simeq \pm v_F\hbar|\vec{k}|$ gilt. Für positive Energien ergibt sich daraus,

$$\nu(\epsilon) = 4\int \frac{d^2k}{(2\pi\hbar)^2}\delta\left(\epsilon - E(\mathbf{k})\right) = 4\int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi\hbar^2}\delta(\epsilon - vk).$$

Hier folgt der Koeffizient 4 der Spin- und Valley-Entartung. Für kleine Energien $|\epsilon| \ll t$ erhalten wir,

$$\nu(\varepsilon) = \frac{2|\epsilon|}{\pi v^2\hbar^2}. \tag{8}$$

(c) Finden Sie die Punkte in der Brillouin-Zone, die für die van Hove-Singularität in Graphen verantwortlich sind. Bestimmen Sie die van Hove-Singularität. Skizzieren Sie die Zustandsdichte in Graphen allgemein.

Wir untersuchen die van Hove-Singularität in Graphen. Wir suchen nach den Punkten in denen die Gruppengeschwindigkeit verschwindet:

$$\nabla_k E(\mathbf{k}) = 0: \quad E(\mathbf{k}) = \pm t\sqrt{f(\mathbf{k})}, \quad \nabla_k E(\mathbf{k}) = \mp t\frac{\nabla_k f(\mathbf{k})}{2\sqrt{f(\mathbf{k})}},$$

$$\partial_{k_x} f(\mathbf{k}) = -6\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_y \sin\frac{3}{2}k_x = 0,$$

$$\partial_{k_y} f(\mathbf{k}) = -2\sqrt{3}\cos\frac{3}{2}k_x \sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_y - 2\sqrt{3}\sin\sqrt{3}k_y = 0.$$

Der Singularitätspunkt sind demnach $k_x^{(0)} = \pi/3$, $k_y^{(0)} = \pi/\sqrt{3}$, $E = t$. Damit ergibt sich,

$$E(\mathbf{k}) \approx \pm t\left(1 + \frac{3}{2}(\delta k_y)^2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}(\delta k_y)(\delta k_x) + ...\right), \quad k_{x(y)} = k_{x(y)}^{(0)} + \delta k_{x(y)}.$$

Wir führen folgende Variablensubstitution durch,

$$y = \delta k_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\delta k_x, \quad x = \delta k_x.$$

Damit erhalten wir

$$E(\mathbf{k}) \approx \pm t\left(1 + \frac{3}{2}\left[y^2 - \frac{3}{4}x^2\right]\right).$$

Jetzt verfahren wir wie in Aufgabe 1b und erhalten,

$$\nu(\epsilon \to t) \sim \ln\left|\frac{t}{|\epsilon| - t}\right|.$$

3. Dirac-Teilchen in Graphen (2+7=9 Punkte)

Betrachten Sie ein "ultrarelativistisches" 2D-Gas bestehend aus Spin-$\frac{1}{2}$ Fermionen mit der Einteilchen-Energie $\varepsilon_\pm(\mathbf{p}) = \pm v_F\hbar|\mathbf{p}|$. Dieses Modell beschreibt Elektronen und Löcher in Graphen in der Nähe der "Dirac-Punkte".

(a) Finden Sie die Fermi-Energie E_F und die Grundzustandsenergie als Funktion der Elektronendichte $n = N/V$.

Lösung: Wir berechnen die Teilchenzahl und die Energie relativ zur halben Füllung (Vorlesung: vollständig gefülltes Band trägt nicht zum Transport sowie zur thermodynamischen Grössen). Für die Teilchenzahl erhalten wir mit dem Koeffizient 4 der Spin- und Valley-Entartung:

$$N = 4V\int_{|\mathbf{k}|\leq k_F}\frac{d^2k}{h^2} = \frac{8\pi V}{h^2v^2}\int_0^{E_F} d\varepsilon\varepsilon. \tag{9}$$

Somit ist die Teilchendichte

$$n = \frac{N}{V} = \frac{8\pi}{h^2v^2}E_F^2 \tag{10}$$

und dadurch die Fermi-Energie

$$E_F = \sqrt{\frac{n}{8\pi}}hv. \tag{11}$$

Die Grundzustandsenergie errechnet sich über

$$E = \frac{8\pi V}{h^2v^2}\int_0^{E_F} d\varepsilon\varepsilon^2 = \frac{8\pi V}{3h^2v^2}E_F^3 \tag{12}$$

$$= \frac{8\pi V}{3h^2v^2}\left(\sqrt{\frac{n}{8\pi}}hv\right)^3 = \frac{hvn^{3/2}V}{6\sqrt{2\pi}}. \tag{13}$$

(b) Bestimmen Sie das chemische Potential μ und die spezifische Wärme c_V der Dirac-Teilchen für $T \ll E_F$ und $T \gg E_F$ (bei fester Elektronendichte n).

Für $T \ll E_F$ können wir die Anregung von Löchern vernachlässigen. Es gilt für die Elektronendichte und innere Energie,

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon) - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} d\varepsilon \nu(\varepsilon)}_{\text{gefülltes Band } \varepsilon_-(\mathbf{p})} \underbrace{\simeq}_{T \ll E_F} \int_{0}^{+\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon) \,, \tag{14}$$

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon)\, \varepsilon\, f(\varepsilon) - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} d\varepsilon \varepsilon \nu(\varepsilon)}_{\text{gefülltes Band } \varepsilon_-(\mathbf{p})} \underbrace{\simeq}_{T \ll E_F} \int_{0}^{+\infty} d\varepsilon \varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon) \,. \tag{15}$$

Mit $\nu(\varepsilon) = 2|\varepsilon|/(\pi v^2)$ aus Aufgabe 2b liefert partielle Integration:

$$n = \frac{2}{\pi v^2 \hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\mu^2 + 4T^2 x^2}{4\cosh^2 x} \,, \tag{16}$$

$$U = \frac{4}{3\pi v^2 \hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\mu^3 + 12 T^2 \mu x^2}{4\cosh^2 x} \,. \tag{17}$$

Hier haben wir die dimensionslose Energie $x = (\varepsilon - \mu)/2T$ eingeführt. Damit erhalten wir schließlich

$$n = \frac{2}{\pi v^2 \hbar^2} \left(\mu^2 + \frac{\pi^2 T^2}{3} \right) \,, \tag{18}$$

$$U = \frac{4\mu}{3\pi v^2 \hbar^2} \left(\mu^2 + \pi^2 T^2 \right) \,. \tag{19}$$

Damit folgt:

$$c_V \simeq \frac{8\pi}{3} \frac{E_F T}{v^2 \hbar^2} \,, \tag{20}$$

$$\mu \simeq E_F \left(1 - \frac{\pi^2 T^2}{6 E_F^2} \right) \,. \tag{21}$$

Für $T \gg E_F$:

$$\begin{aligned}
n &= \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon) - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} d\varepsilon \nu(\varepsilon)}_{\text{gefülltes Band } \varepsilon_-(\mathbf{p})} \\
&= \underbrace{\int_{0}^{\infty} d\varepsilon\, \frac{2|\varepsilon|}{\pi \hbar^2 v^2}\, f(\varepsilon)}_{\text{Elektronen in } \varepsilon_+(\mathbf{p})} - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} d\varepsilon\, \frac{2|\varepsilon|}{\pi \hbar^2 v^2}\, [1 - f(\varepsilon)]}_{\text{fehlende Elektronen in } \varepsilon_-(\mathbf{p})} \\
&= \frac{2}{\pi \hbar^2 v^2} \int_{0}^{\infty} d\varepsilon\, \varepsilon \left[\frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon - \mu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon + \mu)}} \right] \,,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} d\varepsilon\, \varepsilon \left[\frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon - \mu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon + \mu)}} \right] \underbrace{\simeq}_{\beta\mu \ll 1} & -2\mu \int_{0}^{\infty} d\varepsilon\, \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{1 + e^{\beta\varepsilon}} \\
=& \; 2\beta\mu \int_{0}^{\infty} d\varepsilon\, \frac{\varepsilon}{4\cosh^2(\beta\varepsilon/2)} \\
=& \; \frac{2\mu}{\beta} \ln(2),
\end{aligned} \tag{23}$$

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon)\varepsilon f(\varepsilon) - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} d\varepsilon \nu(\varepsilon)\, \varepsilon}_{\text{gefülltes Band } \varepsilon_-(\mathbf{p})} \tag{24}$$

$$= \underbrace{\int_{0}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon)\varepsilon f(\varepsilon)}_{\text{Elektronen in } \varepsilon_+(\mathbf{p})} - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} d\varepsilon \nu(\varepsilon)\, \varepsilon \left[1 - f(\varepsilon)\right]}_{\text{fehlende Elektronen in } \varepsilon_-(\mathbf{p})} \tag{25}$$

$$= \frac{2}{\pi\hbar^2 v^2} \int_0^\infty d\varepsilon\ \varepsilon^2 \left[\frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}} + \frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon+\mu)}}\right] \tag{26}$$

$$\underbrace{\simeq}_{\beta\mu\ll 1} \frac{4}{\pi\hbar^2 v^2} \int_0^\infty d\varepsilon\ \varepsilon^2 \frac{1}{1+e^{\beta\varepsilon}}$$

$$= \frac{6\zeta(3)}{\pi\beta^3\hbar^2 v^2}, \qquad \zeta(3) \simeq 1.202, \tag{27}$$

wobei $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ die Riemann'sche Zeta-Funktion ist .
Wir erhalten für $T \gg E_F$

$$n = \frac{4\ln(2)}{\pi\hbar^2 v^2}\mu T, \tag{28}$$

$$U = \frac{6\zeta(3)T^3}{\pi\hbar^2 v^2}. \tag{29}$$

Damit erhalten wir für das chemische Potential und die spezifische Wärme:

$$\mu = \frac{\pi\hbar^2 v^2 n}{4\ln(2)T}. \tag{30}$$

$$c_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \frac{18\zeta(3)T^2}{\pi\hbar^2 v^2}. \tag{31}$$

(c) Zeigen Sie, dass bei fester Teilchenzahl N für einen adiabatischen Prozess die Beziehung $VT^\alpha = const$ gilt. Bestimmen Sie α. (5 Bonuspunkte)

Lösung:

In dieser Aufgabe schreiben wir die Boltzmann-Konstante k_B explizit.
Ausgehend von der Fermi-Funktion

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}},$$

berechnen wir die Entropie,

$$\begin{aligned}
S &= -\underbrace{4}_{\text{Spin und Valley}} k_B \sum_{\lambda=\pm1} \sum_{\vec{k}} \{f(\varepsilon_{\lambda,k})\ln[f(\varepsilon_{\lambda,k})] + [1-f(\varepsilon_{\lambda,k})]\ln[1-f(\varepsilon_{\lambda,k})]\} \\
&= 4k_B V \int \frac{d^2p}{(2\pi\hbar)^2} \sum_{\lambda=\pm1} \left\{\frac{\ln[1+e^{\beta(\lambda vp-\mu)}]}{1+e^{\beta(\lambda vp-\mu)}} + \frac{\ln[1+e^{-\beta(\lambda vp-\mu)}]}{1+e^{-\beta(\lambda vp-\mu)}}\right\} \\
&= \frac{2k_B V}{\pi\hbar^2 v^2} \int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon \sum_{\lambda=\pm1} \left\{\frac{\ln[1+e^{\beta(\lambda\varepsilon-\mu)}]}{1+e^{\beta(\lambda\varepsilon-\mu)}} + \frac{\ln[1+e^{-\beta(\lambda\varepsilon-\mu)}]}{1+e^{-\beta(\lambda\varepsilon-\mu)}}\right\} \\
&= \frac{2k_B V(k_BT)^2}{\pi\hbar^2 v^2} \int_0^\infty dx x \left\{\frac{\ln[1+e^{-\beta\mu+x}]}{1+e^{-\beta\mu+x}} + \frac{\ln[1+e^{\beta\mu-x}]}{1+e^{\beta\mu-x}}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\ln[1+e^{-\beta\mu-x}]}{1+e^{-\beta\mu-x}} + \frac{\ln[1+e^{\beta\mu+x}]}{1+e^{\beta\mu+x}}\right\} = \frac{2k_B}{\pi\hbar^2 v^2} V(k_BT)^2 g_S\left(\frac{\mu}{k_BT}\right)
\end{aligned} \tag{32}$$

$$g_S\,(y) = \int_0^\infty dx x \left\{ \frac{\ln(1+e^{-y+x})}{1+e^{-y+x}} + \frac{\ln(1+e^{y-x})}{1+e^{y-x}} + \frac{\ln(1+e^{-y-x})}{1+e^{-y-x}} + \frac{\ln(1+e^{y+x})}{1+e^{y+x}} \right\} . \tag{33}$$

Die Teilchenzahl lässt sich ebenfalls über $f(\varepsilon)$ bestimmen (s. Aufgabe 3b):

$$N = \sum_{\lambda=\pm1} \sum_{\vec{k}} f(\varepsilon_{\lambda,k}) \tag{34}$$

$$= \frac{2V}{\pi\hbar^2 v^2} \int_0^\infty d\varepsilon\ \varepsilon \left[\frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}} - \frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon+\mu)}} \right] \tag{35}$$

$$= \frac{2V(k_BT)^2}{\pi\hbar^2 v^2} \int_0^\infty dx\ x \left[\frac{1}{1+e^{x-\beta\mu}} - \frac{1}{1+e^{x+\beta\mu}} \right] \tag{36}$$

$$= V\ \frac{2(k_BT)^2}{\pi\hbar^2 v^2}\ g_N\left(\frac{\mu}{k_BT}\right) . \tag{37}$$

Hierbei ist

$$g_N(y) = \int_0^\infty dx\ x \left[\frac{1}{1+e^{x-y}} - \frac{1}{1+e^{x+y}} \right] . \tag{38}$$

Somit ergibt sich

$$\frac{S}{k_BN} = \frac{g_S\left(\frac{\mu}{k_BT}\right)}{g_N\left(\frac{\mu}{k_BT}\right)} = h\left(\frac{\mu}{k_BT}\right) . \tag{39}$$

Bei fester Teilchenzahl N ist $\mu/(k_BT) = \mathrm{const}$, da ein adiabatischer Prozess betrachtet wird ($S = \mathrm{const}$). Somit

$$\frac{N}{VT^2} = \frac{2k_B^2}{\pi\hbar^2 v^2} g_N\left(\frac{\mu}{k_BT}\right) = \mathrm{const} \ \Rightarrow\ VT^2 = \mathrm{const} \ \Rightarrow\ \alpha = 2\,. \tag{40}$$