

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Mirlin, Dr. I. Gornyi
U. Briskot, N. Kainaris, Dr. E. KönigBlatt 6: Lösungen
Besprechung 04.12.2014

1. Pauli-Paramagnetismus

(5+2=7 Punkte)

- (a) Drücken Sie die temperaturabhängige Korrektur zur paramagnetischen Suszeptibilität χ_{Pauli} von Leitungselektronen im Limes kleiner Temperatur ($T \ll \epsilon_F$) durch die Zustandsdichte und die Ableitungen der Zustandsdichte an $\epsilon = \epsilon_F$ aus.

Lösung:

$$\epsilon_{\sigma,k} = \epsilon_k - \sigma \mu_B B, \quad \sigma = \pm 1. \quad (1)$$

$$N_\sigma = \sum_k f(\epsilon_{\sigma,k}). \quad (2)$$

$$M = -\mu_B(N_+ - N_-) = -\mu_B \sum_k \left(\frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_k - \mu_B B - \mu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_k + \mu_B B - \mu)}} \right) \quad (3)$$

$$\simeq -\mu_B^2 B \frac{dN(B=0)}{d\mu}. \quad (4)$$

Für $T \ll \epsilon_F$:

$$M = -\mu_B^2 B 2 \sum_k \frac{\beta}{4 \cosh^2((\epsilon_k - \mu)/2T)} = -\frac{\mu_B^2 B V}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \nu(\epsilon) \frac{1}{2 \cosh(\epsilon - \mu)/2T} \quad (5)$$

$$M = 2\mu_B^2 B V \left[\nu(\mu) + \frac{\pi^2}{6} T^2 \frac{d^2 \nu(\epsilon)}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=\mu} \right]. \quad (6)$$

Wir verwenden weiter

$$\nu(\mu) \simeq \nu(\epsilon_F) + \nu'(\epsilon_F)(\mu - \epsilon_F), \quad (7)$$

und

$$\mu - \epsilon_F = -\frac{\pi^2}{6} T^2 \frac{\nu'(\epsilon_F)}{\nu(\epsilon_F)}. \quad (8)$$

Daher können wir in Gl. (6) zur Ordnung $\mathcal{O}[(T/\epsilon_F)^2]$ das chemische Potential μ durch ϵ_F ersetzen. Damit erhalten wir

$$M = 2\mu_B^2 B V \left[\nu(\epsilon_F) - \frac{\pi^2}{6} T^2 \frac{[\nu'(\epsilon_F)]^2}{\nu(\epsilon_F)} + \frac{\pi^2}{6} T^2 \nu''(\epsilon_F) \right]. \quad (9)$$

- (b) Bestimmen Sie die Pauli-Suszeptibilität für das parabolische Elektronenspektrum bis zur Ordnung $\mathcal{O}[(k_B T/\epsilon_F)^2]$.

Lösung:

$$\nu(\epsilon) = \frac{m^{3/2} \sqrt{\epsilon}}{\pi^2 2^{3/2}} = \mathcal{C} \epsilon^{1/2}. \quad (10)$$

Damit folgt

$$\chi = \frac{1}{V} \frac{dM}{dB} = 2\mu_B^2 \nu(\epsilon_F) \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (11)$$

2. De-Haas-van-Alphen-Effekt

(8 Punkte)

Berechnen Sie die De-Haas-van-Alphen-Oszillationen bei nichtverschwindenden Temperaturen im Bereich von kleinen Magnetfeldern für das parabolische Elektronenspektrum.

Hinweis: Verwenden Sie die Poisson'sche Summenformel.

Lösung: Wir nehmen ein magnetisches Feld B in z -Richtung an. Die Landau-Niveaus sind:

$$E_{n,p_z} = \omega_c(n + 1/2) + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (12)$$

Hierbei ist die Zyklotronfrequenz gegeben durch,

$$\omega_c = \frac{|e|B}{mc}. \quad (13)$$

Die magnetische Länge l_B ist definiert durch $l_B^2 = \hbar c/(|e|B)$. Die Entartung der Landau-Niveaus ist

$$\mathcal{N} = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2}. \quad (14)$$

Der allgemeine Ausdruck für das großkanonische Potential ist

$$\begin{aligned} \Omega &= -T L_z \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_z}{2\pi} \ln [1 + e^{-\beta(\epsilon_{n,p_z} - \mu)}] \\ &= -F(n=0) - \sum_{n=1}^{+\infty} F(n), \end{aligned} \quad (15)$$

wobei ($V = L_x L_y L_z$) die Funktion F gegeben ist durch

$$F(n) = \frac{T|e|BV}{4\pi^2 c \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \ln [1 + e^{-\beta[\omega_c(n+1/2) + p_z^2/2m - \mu]}]. \quad (16)$$

Wir verwenden nun die Poisson'sche Summenformel

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - j) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k x}. \quad (17)$$

Mit $0 < a < 1$ erhalten wir durch Integration von Gl. (17) über eine Testfunktion $g(t)$,

$$\int_{-a}^{+\infty} dt g(t) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(t - j) = \int_{-a}^{+\infty} dt g(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k t}. \quad (18)$$

Daraus folgt,

$$g(0) + \sum_{j>0} g(k) = \int_{-a}^{+\infty} dt g(t) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-a}^{+\infty} dt \cos(2\pi kt) g(t). \quad (19)$$

Schließlich ergibt sich für das großkanonische Potential

$$\Omega = - \int_{-a}^{+\infty} dt F(t) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-a}^{+\infty} dt \cos(2\pi kt) F(t). \quad (20)$$

Wir betrachten zunächst den ersten Term in Gl. (20),

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+\infty} dt F(t) &= \frac{T|e|BV}{4\pi^2 c\hbar} \int_{-a}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \ln \left[1 + e^{-\beta[\omega_c(t+1/2)+p_z^2/2m-\mu]} \right] \\ &= \frac{T|e|BV}{4\pi^2 c\hbar} \frac{1}{\beta\omega_c} \int_{-\beta[\mu+\omega_c(a-1/2)]}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \ln \left[1 + e^{-\beta[p_z^2/2m+t]} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Für $\mu \gg \omega_c$ kann die untere Integralgrenze nach $-\infty$ ausgedehnt werden. In diesem Grenzfall ist das Integral unabhängig vom magnetischen Feld.

Wir betrachten nun den oszillierenden, magnetfeld-abhängigen Anteil des großkanonischen Potentials, Gl. (20),

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{osc}} &= -2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-a}^{+\infty} dt \cos(2\pi kt) F(t) \\ &= -\frac{T|e|BV}{2\pi^2 c\hbar} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-a+1/2}^{+\infty} dt \cos(2\pi kt) \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \ln \left[1 + e^{-\beta[\omega_c t + p_z^2/2m - \mu]} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Hierbei haben wir die Integrationsvariable t um die Grundzustandsenergie $1/2$ verschoben. Wir wählen nun $a = 1/2$,

$$\Omega^{\text{osc}} = -\frac{T|e|BV}{2\pi^2 c\hbar} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} dt \cos(2\pi kt) \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \ln \left[1 + e^{-\beta[\omega_c t + p_z^2/2m - \mu]} \right]. \quad (23)$$

Wir substituieren die t -Integration durch die Integration über die Energie ε gemäß,

$$\varepsilon = \omega_c t + p_z^2/2m, \quad (24)$$

$$t = (\varepsilon - p_z^2/2m)/\omega_c. \quad (25)$$

$$\Omega^{\text{osc}} = -\frac{TmV}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} d\varepsilon 2 \int_0^{+\infty} dp_z \cos[2\pi kt(\varepsilon)] \ln \left[1 + e^{+\beta(\mu-\varepsilon)} \right]. \quad (26)$$

Hier haben wir die untere Integrationsgrenze der Energieintegration $p_z^2/2m$, nach 0 geschickt. Dies ist erlaubt, da relevante Energien von der Größenordnung μ sind, und wie wir im Folgenden sehen werden die dominanten Beiträge zum Integral von $p_z = 0$ kommen.

Um das p_z -Integral zu bestimmen verwenden wir die Methode der stationären Phase. Der \cos in Gl. (26) ist eine schnell oszillierende Funktion in p_z . Der Hauptbeitrag kommt also von den Punkten $t^{(ex)}$, an denen $dt(\varepsilon, p_z)/dp_z = 0$ gilt. Daraus folgt

$$p_z^{(ex)} = 0, \quad (27)$$

$$t^{(ex)} = \frac{\varepsilon}{\omega_c}. \quad (28)$$

Gleichung (26) ergibt in dieser Näherung

$$\Omega^{\text{osc}} = -\frac{TmV}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} d\varepsilon k^{-1/2} \underbrace{\left| \frac{d^2 t}{dp_z^2} \right|^{-1/2}}_{\sqrt{m\omega_c}} \cos\left(\frac{2\pi k\varepsilon}{\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right) \ln[1 + e^{+\beta(\mu-\varepsilon)}] \quad (29)$$

$$= -\frac{Tm^{3/2}\omega_c^{1/2}V}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1/2} \int_0^{+\infty} d\varepsilon \cos\left(\frac{2\pi k\varepsilon}{\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right) \ln[1 + e^{+\beta(\mu-\varepsilon)}] . \quad (30)$$

Partielle Integration liefert,

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{osc}} = & -\frac{Tm^{3/2}\omega_c^{1/2}V}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\omega_c}{2\pi k^{3/2}} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \ln[1 + e^{+\beta\mu}] \right. \\ & \left. + \int_{-\beta\mu}^{+\infty} d\xi \sin\left(\frac{2\pi k(\mu + T\xi)}{\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{1 + e^\xi} \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Der erste Term zeigt keine Oszillationen, daher betrachten wir nur den zweiten Term. Für $\mu \gg T$ können wir die untere Integrationsgrenze nach $-\infty$ schicken. Dann verwenden wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{iaz}}{1 + e^z} = -\frac{i\pi}{\sin(\pi\alpha)}. \quad (32)$$

Damit erhalten wir mit $\alpha = 2\pi kT/\omega_c$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \sin\left(\frac{2\pi k(\mu + T\xi)}{\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{1 + e^\xi} &= \frac{1}{2i} \left\{ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{e^{i\alpha\xi}}{1 + e^\xi} \right) e^{+i2\pi k\mu/\omega_c - i\pi/4} \right. \\ & \left. - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{e^{-i\alpha\xi}}{1 + e^\xi} \right) e^{-i2\pi k\mu/\omega_c + i\pi/4} \right\} = -\frac{\pi \cos\left(\frac{2\pi k\mu}{\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sinh(\pi\alpha)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Damit ergibt sich der oszillierende Anteil des großkanonischen Potentials zu

$$\Omega^{\text{osc}} = V \frac{T(\omega_c m)^{3/2}}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \frac{\cos\left(\frac{2\pi k\mu}{\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sinh(2\pi^2 kT/\omega_c)}. \quad (34)$$

Die Magnetisierung ist

$$M^{\text{osc}} = -\frac{1}{V} \frac{d\Omega^{\text{osc}}}{dB}. \quad (35)$$

Hierbei müssen wir für den oszillierenden Anteil nur die schnell veränderlichen Funktionen ableiten. Damit folgt:

$$M^{\text{osc}} = -\frac{Te\mu}{2\pi\omega_c l_B} \frac{d\omega_c}{dB} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1/2}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k\mu}{\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sinh(2\pi^2 kT/\omega_c)}. \quad (36)$$

3. Landau-Niveaus in Graphen

(8+7=15 Punkte)

Betrachten Sie Elektronen in Graphen in der Nähe von Dirac-Punkten.

(a) Bestimmen Sie die Landau-Niveaus ε_n .

Lösung:

Wir betrachten Graphen in einem homogenen magnetischen Feld B in positive z -Richtung. Der Hamilton-Operator für den Dirac Punkt K ist

$$H = v_F \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}). \quad (37)$$

Das Vektorpotential in Landau-Eichung ist,

$$\vec{A} = -yB\hat{x}. \quad (38)$$

Wir führen im Folgenden die magnetische Länge l_B , gemäß $l_B^2 = 1/|e|B$ ein. Damit können wir den Hamiltonoperator schreiben als,

$$H = v_F \begin{pmatrix} 0 & p_x - ip_y - \frac{y}{l_B^2} \\ p_x + ip_y - \frac{y}{l_B^2} & 0 \end{pmatrix} = v_F \begin{pmatrix} 0 & \Pi \\ \Pi^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Wir betrachten die Kommutator-Relationen der Operatoren

$$\Pi = p_x - ip_y - \frac{y}{l_B^2}, \quad (40)$$

$$\Pi^\dagger = p_x + ip_y - \frac{y}{l_B^2}, \quad (41)$$

und erhalten,

$$[\Pi, \Pi^\dagger] = \frac{2}{l_B^2}. \quad (42)$$

Wir sehen also, dass die neuen Operatoren

$$a = \frac{l_B}{\sqrt{2}} \Pi, \quad (43)$$

$$a^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2}} \Pi^\dagger, \quad (44)$$

die Vertauschungsrelationen der Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators erfüllen. Die Eigenzustände des Hamiltonoperators (37), geschrieben als

$$H = \frac{\sqrt{2}v_F}{l_B} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \omega_c \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

können demnach mit Hilfe der Eigenzustände des harmonischen Oszillators $|\phi_n\rangle$ beschrieben werden. Hier haben wir außerdem die Zyklotronfrequenz in Graphen $\omega_c = \sqrt{2}v_F/l_B$ eingeführt.

Die Eigenzustände

$$|\Psi_{\lambda,n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\phi_{n-1}\rangle \\ \lambda|\phi_n\rangle \end{pmatrix}, \quad (46)$$

haben Energien

$$\varepsilon_{\lambda,n} = \lambda\omega_c\sqrt{n}, \quad \lambda = \pm 1, n \in \mathbf{N}_{>0}. \quad (47)$$

Zusätzlich finden wir einen Zustand

$$|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |\phi_0\rangle \end{pmatrix}, \quad (48)$$

mit Energie $\varepsilon_{n=0} = 0$.

Der Impuls p_x kommutiert mit dem Hamiltonoperator. Somit ergibt sich die übliche Entartung der Landau-Niveaus bezüglich des Impulses in x-Richtung,

$$\mathcal{N} = \frac{L^2}{2\pi l_B^2}. \quad (49)$$

Der Dirac-Punkt K' ist mit K durch die Zeitumkehrtransformation verknüpft. Daher sehen wir sofort, dass für K' :

$$H_{K'} = \omega_c \begin{pmatrix} 0 & a^\dagger \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

und somit

$$|\Psi_{\lambda,n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\phi_n\rangle \\ \lambda |\phi_{n-1}\rangle \end{pmatrix}, \quad (51)$$

$$|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} |\phi_0\rangle \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Die Eigenenergien sind identisch.

Die Energien können auch aus der semiklassischen Quantisierungsbedingung

$$S(\varepsilon) = \frac{2\pi|e|B}{\hbar c}(n + \gamma) \quad (53)$$

gewonnen werden. Hierbei ist $S = \pi\varepsilon^2/v_F^2$, die im k-Raum eingeschlossene, bei konstanter Energie ε . Daraus erhalten wir

$$\varepsilon = v_F \sqrt{2eB} \sqrt{n + \gamma}. \quad (54)$$

Für konventionelle Systeme mit parabolischem Spektrum gilt $\gamma = 1/2$. In Graphen haben wir $\gamma = 0$, was offensichtlich ungewöhnlich ist.

- (b) Finden Sie die Landau-Suszeptibilität des Elektronengases in Graphen bei $T = 0$.

Lösung:

Für dieses Problem ist es von Vorteil, Landau-Niveaus in der Gegenwart einer Masse m zu verwenden. Am Ende der Rechnung können wir die Masse m gegen Null gehen lassen.

Die Eigenenergien für Graphen mit Masse m bestimmt man aus dem Hamiltonoperator,

$$H_K = \begin{pmatrix} m & \omega_c a^\dagger \\ \omega_c a & -m \end{pmatrix}, \quad (55)$$

bzw.

$$H_{K'} = \begin{pmatrix} m & \omega_c a \\ \omega_c a^\dagger & -m \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Sie ergeben sich zu

$$\varepsilon_n = \lambda \sqrt{\omega_c^2 n + m^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (57)$$

Für $n \neq 0$ ist $\lambda = \pm 1$, während für $n = 0$, $\lambda = +1$ für K und $\lambda = -1$ für K' .

Wir berechnen das großkanonische Potential für Graphen,

$$\Omega = -2T\mathcal{N} \sum_s \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\lambda \in I_n^s} \ln [1 + e^{-\beta(\varepsilon_{n,s,\lambda}-\mu)}] . \quad (58)$$

Hierbei ist \mathcal{N} die Entartung der Landau-Niveaus. Der Faktor 2 berücksichtigt die Spin-Entartung. Der Index s bezeichnet K und K' . Wir schreiben $s = +1$ für K und $s = -1$ für K' . Das Intervall I_n^s ist schließlich $I_n^s = \{+1, -1\}$ für $n \neq 0$ und $I_n^s = \{+1\}$ für $n = 0$. Mit diesen Definitionen können wir die Energie schreiben als

$$E_n = s\lambda\sqrt{\omega_c^2 n + m^2} . \quad (59)$$

Da wir über die Dirac Punkte summieren können wir das großkanonische Potential auch schreiben als,

$$\Omega = -4T\mathcal{N} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\lambda=\pm 1} g_n \ln [1 + e^{-\beta(\varepsilon_{n,s,\lambda}-\mu)}] , \quad (60)$$

where

$$g_n = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 1/2, & n = 0 \end{cases} . \quad (61)$$

Wir wollen die Euler-MacLaurin Summenformel für das großkanonische Potential in der Form

$$\Omega = -4T\mathcal{N} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\lambda} g_n F(\varepsilon_{\lambda,n}) \quad (62)$$

verwenden. Diese ist ($k \in \mathbb{N}_0$),

$$\int_0^1 g(t) dt = \frac{g(1)}{2} + \frac{g(0)}{2} - \sum_{j=1}^k \frac{B_{2j}}{(2j)!} (g^{2j-1}(1) - g^{(2j-1)}(0)) + R_{2k+2} . \quad (63)$$

Wir summieren nun N Einheitsintervalle $\{i, i+1\}$ ($i = 0, \dots, N-1$) auf und erhalten

$$\sum_{i=0}^N g(i) = \frac{g(0)}{2} + \frac{g(N)}{2} + \int_0^{+\infty} dt g(t) + \sum_{j=1}^k \frac{B_{2j}}{(2j)!} (g^{2j-1}(N) - g^{(2j-1)}(0)) + R_{2k+2} . \quad (64)$$

Angewendet auf Gl. (62) ergibt dies:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N F(\varepsilon_n) &= \frac{F(\varepsilon_N)}{2} - \frac{F(\varepsilon_0)}{2} + \int_0^{+\infty} dx F(\varepsilon_x) \\ &+ \frac{B_2}{2} \left(\left. \frac{dF(\varepsilon_{\lambda,x})}{dx} \right|_{x=N} - \left. \frac{dF(\varepsilon_{\lambda,x})}{dx} \right|_{x=0} \right) + \mathcal{O}((\hbar\omega_c)^6) . \end{aligned} \quad (65)$$

Mit

$$\frac{dF(\varepsilon_{\lambda,x})}{dx} = -\frac{\lambda\beta\omega_c^2}{2\sqrt{\omega_c^2 x + m^2}} \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_x - \mu)}} . \quad (66)$$

folgt

$$\left. \frac{dF(\varepsilon_{\lambda,x})}{dx} \right|_{x=N \rightarrow \infty} = 0, \quad (67)$$

$$\left. \frac{dF(\varepsilon_{\lambda,x})}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)}} \frac{\lambda \beta \omega_c^2}{2m}. \quad (68)$$

Der Term $F(\varepsilon_{\lambda,0})$ ist unabhängig vom Magnetfeld und muss daher nicht weiter betrachtet werden. Ebenso verschwindet der Term $F(\varepsilon_{+,0})$. Der Term $F(\varepsilon_{-,N})$ divergiert für $N \rightarrow +\infty$ und rührt vom gefüllten Dirac-See her. Wir betrachten ihn vorerst nicht, s. a. Diskussion unten.

$$\begin{aligned} \Omega &= -4T\mathcal{N} \frac{B_2}{2} \sum_{\lambda} \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_{\lambda,0} - \mu)}} \frac{\lambda \beta \omega_c^2}{2m} \\ &= 2B_2\mathcal{N}\omega_c^2 \frac{1}{2m} \left\{ \frac{1}{1 + e^{-\beta(m+\mu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(m-\mu)}} \right\}. \end{aligned} \quad (69)$$

Wir untersuchen das Ergebnis zunächst für $T \rightarrow 0$. In diesem Grenzfall erhalten wir

$$\Omega = 2B_2\mathcal{N}\omega_c^2 \frac{\Theta(|\mu| - m)}{2m} \rightarrow 2B_2\mathcal{N}\omega_c^2 \delta(\mu). \quad (70)$$

Für die Magnetisierung erhalten wir damit ($B_2 = 1/6$)

$$M = -\frac{1}{V} \frac{d\Omega}{dB} = -\frac{2v_F^2 e^2 B}{3\pi \hbar^2 c^2} \delta(\mu). \quad (71)$$

$$\chi = -\frac{2v_F^2 e^2}{3\pi \hbar^2 c^2} \delta(\mu). \quad (72)$$

Das Ergebnis für endliche Temperaturen und verschwindende Masse erhält man dadurch, dass man Gl. (69) für kleine Masse m entwickelt. Dies führt auf

$$\Omega = \frac{L^2 B^2 e^2 v_F^2}{3\pi} \frac{\text{sech}^2(\mu/2T)}{4T}. \quad (73)$$

$$\chi = -\frac{2e^2 v_F^2}{3\pi} \frac{\text{sech}^2(\mu/2T)}{4T}. \quad (74)$$

Weitere Informationen zur diamagnetischen Suszeptibilität finden sich in:

J. W. McClure, Phys. Rev. 104, 666 (1956);

M. Koshino and T. Ando, Phys. Rev. B 75, 235333 (2007).

Zuletzt sei bemerkt, dass unser Ergebnis nicht ganz die Realität in Graphen widerspiegelt. Im vollständigen Gittermodell erhält man neben dem Dirac-Peak bei $\mu = 0$ auch einen paramagnetischen Beitrag des Gitters. Dieser sorgt auch dafür, dass die Summenformel

$$\int d\mu \chi(\mu) = 0. \quad (75)$$

erfüllt ist.

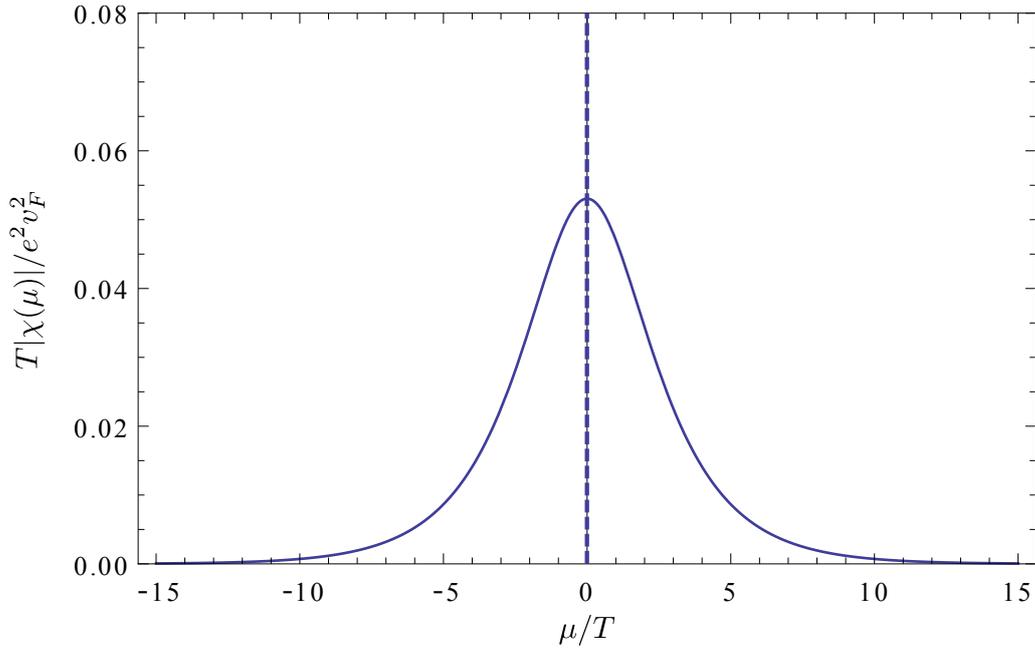


Abbildung 1: Der Absolutbetrag der dimensionslosen Suszeptibilität in Graphen für endliche Temperaturen gemäß Gl. (74) (blaue Linie) und der δ -Peak bei $\mu = 0$ für $T = 0$, Gl. (72) (gestrichelte Linie).

Bonusaufgabe: Weyl-Halbmetail im Magnetfeld (10 Bonuspunkte)

Betrachten Sie ein Weyl-Halbmetail in 3 Dimensionen. Der Hamilton-Operator lautet:

$$\hat{H} = v(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z),$$

wobei $\sigma_{x,y,z}$ die Pauli-Matrizen sind.

Bestimmen Sie die Landau-Niveaus und die Zustandsdichte des Weyl-Halbmetails im Magnetfeld.

Lösung:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y + y/l_B^2 \\ p_x + ip_y + y/l_B^2 & -p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & \omega_c a^\dagger \\ \omega_c a & -p_z \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Die Eigenenergien sind ähnlich zu Graphen mit Masse und können etwa aus

$$\hat{H}^2 \Psi = E^2 \Psi, \quad (77)$$

bestimmt werden. Dies liefert

$$\varepsilon_{\lambda,n} = \begin{cases} +p_z, & n = 0 \\ \lambda \sqrt{\omega_c^2 n + p_z^2}, & n > 0 \end{cases}. \quad (78)$$

Wir bestimmen die Zustandsdichte:

$$\nu(\varepsilon) = \frac{\mathcal{N}}{L^2} \int \frac{dp_z}{2\pi} \delta(\varepsilon - p_z) + \frac{\mathcal{N}}{L^2} \int \frac{dp_z}{2\pi} \sum_{n=1} \sum_{\lambda=\pm 1} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{n,\lambda,p_z}) \quad (79)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 l_B^2} \left(1 + \sum_{n=1} \sum_{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \delta(\varepsilon - \lambda \sqrt{\omega_c^2 n + p_z^2}) \right). \quad (80)$$

Die Nullstellen der δ -Funktion liegen bei

$$|p_z| = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_c^2 n}, \quad (81)$$

$$\lambda = \text{sign}(\varepsilon), \quad (82)$$

$$\left| \frac{d\varepsilon_{n,p_z}}{dp_z} \right| = \frac{\lambda p_z}{\sqrt{\omega_c^2 n + p_z^2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \omega_c^2 n}}{|\varepsilon|}. \quad (83)$$

Weiter sind Nullstellen nur möglich, wenn $n \leq \left\lfloor \frac{\varepsilon^2}{\omega_c^2} \right\rfloor$. Damit folgt

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2 l_B^2} \left(1 + 2|\varepsilon| \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{\varepsilon^2}{\omega_c^2} \right\rfloor} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - \omega_c^2 n}} \right). \quad (84)$$