Karlsruhe Institute for Technology | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theorie der Kondensierten Materie I WS 15/16

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny, Dr. I. Protopopov

Blatt 1
Abgabe 29.10.15

---

1. Reziprokes Gitter (15 Punkte)

(a) **3 Punkte.** Beweisen Sie, dass das reziproke Gitter eines reziproken Gitters wieder das ursprüngliche, reale Gitter ist.

(b) **6 Punkte.** Konstruieren Sie explizit das reziproke Gitter des flächenzentrierten kubischen (fcc) Gitters.

(c) **6 Punkte.** Bestimmen Sie das reziproke Gitter des zweidimensionalen Honigwabengitters. Konstruieren Sie daraus die erste Brillouin-Zone von Graphen.

2. Korrelationsfunktionen. (55 Punkte)

Wir betrachten ein Gas bestehend aus N freien Elektronen, dass im Grundzustand den sogenannten Fermi–See "auffüllt". Diesen Grundzustand des freien Fermi–Gases kann man wie folgt in zweiter Quantisierung darstellen:

$$|\phi_0\rangle \;=\; \prod_{|k|<k_F,\sigma} a^\dagger_{k,\sigma}\,|\,0\,\rangle \;, \tag{1}$$

wobei alle Impulse (bei $k = 0$ beginnend) aufgefüllt werden bis k_F. Hier ist $a^\dagger_{k,\sigma}$ der Erzeugungsoperator eines Elektrons mit Impuls k und Spin-Projektion σ.

(a) **5 Punkte.** Zeigen Sie, dass der "Fermi–Impuls" gegeben ist durch $k_F \;=\; (3\pi^2 n)^{1/3}$, wobei $n = N/V$ die Teilchendichte ist.

(b) **5 Punkte.** Wir führen jetzt die fermionischen Feldoperatoren an:

$$\hat\Psi^\dagger_\sigma(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k e^{-ikr}\;\hat a^\dagger_{k,\sigma} \qquad \text{und} \qquad \hat\Psi_\sigma(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k e^{ikr}\;\hat a_{k,\sigma}\;, \tag{2}$$

deren Wirkung sehr intuitiv ist: $\hat\Psi_\sigma(x)$ vernichtet ein Teilchen mit Spin σ bei x, während $\hat\Psi^\dagger_\sigma(x)$ ein Teilchen mit Spin σ bei x erzeugt. Zeigen Sie, dass diese Feldoperatoren die kanonsichen Anti–Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$\left\{\hat\Psi_\sigma(x), \hat\Psi^\dagger_{\sigma'}(x')\right\} \equiv \hat\Psi_\sigma(x)\hat\Psi^\dagger_{\sigma'}(x') + \hat\Psi^\dagger_{\sigma'}(x')\hat\Psi_\sigma(x) = \delta(x-x')\delta_{\sigma\sigma'} \tag{3}$$

(c) **15 Punkte.** Die Ein–Teilchen Korrelationsfunktion ist wie folgt definiert:

$$G_\sigma(r-r') = \langle\phi_0|\,\hat\Psi^\dagger_\sigma(r)\hat\Psi_\sigma(r')\,|\phi_0\rangle \;. \tag{4}$$

Diese Korrelationsfunktion kann man interpretieren als Wahrscheinlichkeitsamplitude, ein Elektron mit Spin σ bei r' zu vernichten und bei r wieder zu erzeugen. Zeigen Sie, dass gilt

$$G_\sigma(r - r') \;=\; \frac{n}{2} \cdot \frac{3(\sin x - x\cos x)}{x^3} \;. \tag{5}$$

Hierbei ist $x = k_F\,|r - r'|$. *Hinweis:* Benutzen Sie Fouriertransformation.

(d) **10 Punkte.** Die Zwei–Teilchen Korrelationsfuntion gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen bei r' mit Spin σ' zu finden, wenn sich bei r bereits ein Teilchen mit Spin σ befindet. Sie ist wie folgt definiert:

$$g_{\sigma,\sigma'}(r - r') \;=\; \left(\frac{2}{n}\right)^2 \langle\phi_0|\, \hat{\Psi}^\dagger_\sigma(r)\hat{\Psi}^\dagger_{\sigma'}(r')\hat{\Psi}_{\sigma'}(r')\hat{\Psi}_\sigma(r)\,|\phi_0\rangle \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass im Falle $\sigma \neq \sigma'$ für beliebige r und r' gilt:

$$g_{\sigma,\sigma'}(r - r') \;=\; 1 \;.$$

(e) **10 Punkte.** Zeigen Sie nun, dass sich im Falle $\sigma = \sigma'$ die Zwei–Teilchen Korrelationsfunktion durch die Ein–Teilchen Korrelationsfunktion ausdrücken lässt,

$$g_{\sigma,\sigma}(r - r') \;=\; 1 - \frac{4}{n^2}\left(G_\sigma(r - r')\right)^2 \;. \tag{7}$$

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis von Aufgabenteil **d**) und überlegen Sie sich, was das ganze mit dem Pauli–Prinzip zu tun hat.

(f) **10 Punkte.** Um sich das Pauli–Prinzip zu verdeutlichen, berechnen Sie folgendes Integral:

$$\frac{n}{2}\int d^3r\big(\, g_{\sigma,\sigma}(r) - 1\,\big) \tag{8}$$

Wie interpretieren Sie das Ergebnis?