Theorie der Kondensierten Materie I WS 2015/16

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny, Dr. I. Protopopov

Blatt 4
Besprechung 19.11.2015

---

1. Dynamik von Bloch-Elektronen: (5 Punkte)

Wir betrachten Elektronen in einem periodischen Potential. Im einfachsten Fall handelt es sich um ein einfach kubisches Gitter in der *tight-binding approximation* mit dem Spektrum $\epsilon(\boldsymbol{k}) = -2t(\cos(ak_x) + \cos(ak_y) + \cos(ak_z))$ wobei t das *hopping*-Integral ist. Das Bandminimum liegt bei $\boldsymbol{k} = 0$, Entwickeln in der Nähe des Bandminimums liefert für $ak_i \ll 1$

$$\epsilon = \epsilon_0 + tk^2a^2 \qquad (k \equiv |\boldsymbol{k}|) \tag{1}$$

mit $\epsilon_0 = \epsilon(0)$. Das Spektrum entspricht also dem eines Teilchens mit der *effektiven* Masse $m^\star = \hbar^2/(2ta^2)$.

Nun nehmen wir an, dass sich solch ein Elektron mit effektiver Masse $m^\star$ in einem schwach oszillierenden elektrischen Feld $\boldsymbol{E} = E_x\hat{\boldsymbol{x}}\exp(-i\omega t)$ und in einem konstanten Magnetfeld $\boldsymbol{B} = -B\hat{\boldsymbol{z}}$ bewegt.

Zeigen Sie, dass dies zur Zyklotron Resonanz führt,

$$i(\omega - \omega_c)v = \frac{e}{m^\star}E_x\ , \tag{2}$$

mit der Zyklotron-Frequenz $\omega_c = \frac{eB}{cm^\star}$ und der "komplexen" Geschwindigkeit $v \equiv v_x + iv_y$.

2. Extremalbahnen im reziproken Raum: (6+7+7 Punkte+6 Bonuspunkte)

In einem homogenen Magnetfeld B bewegen sich Kristallelektronen im $\boldsymbol{k}$-Raum auf Bahnen, die auf Flächen konstanter Energie verlaufen und deren Bahnfläche senkrecht zum angelegten Magnetfeld ist. Für geschlossene Bahnen ist die Umlaufzeit durch

$$T(E, \boldsymbol{k}) = \frac{\hbar^2}{eB}\frac{\partial S_{\boldsymbol{k}}}{\partial E} \tag{3}$$

gegeben, wobei $S_{\boldsymbol{k}}$ die von der Elektronenbahn im $\boldsymbol{k}$-Raum umschlossene Fläche senkrecht zu $\boldsymbol{B}$ ist.

(a) Begründen Sie qualitativ, warum im Experiment (z.B. Zyklotronresonanz) immer nur extremale Bahnen von Elektronen, die sich auf Flächen konstanter Energie bewegen, beobachtet werden.

Bitte wenden ...

(b) Welche Form besitzen Extremalbahnen im $\boldsymbol{k}$-Raum, wenn für die Elektronen eine isotrope $E(k)$ Beziehung

$$E(k) = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m^\star} \tag{4}$$

angenommen wird. Berechnen Sie die resultierende Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m_c$ und zeigen Sie, dass für den angenommenen Spezialfall die Zyklotronmasse m_c mit der effektiven Masse $m^\star$ üebereinstimmt.

(c) In einigen Materialien wie Silizium und Germanium sind die Flächen konstanter Energie Rotationsellipsoide

$$E(\boldsymbol{k}) = \hbar^2 \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{2m_t} + \frac{k_z^2}{2m_l} \right) \tag{5}$$

mit den transversalen und longitudinalen effektiven Massen m_t und m_l. Berechnen Sie die Zyklotronfrequenz ω_c für $\boldsymbol{B}||z$ und leiten Sie daraus die Zyklotronmasse m_c ab. Was passiert, wenn wir das Magnetfeld senkrecht zur z-Richtung anlegen?

(d) **Zusatzaufgabe:** Im allgemeinen Fall sind die Bänder völlig anisotrop, d.h.

$$E(\boldsymbol{k}) = \hbar^2 \left(\frac{k_x^2}{2m_1} + \frac{k_y^2}{2m_2} + \frac{k_z^2}{2m_3} \right) \tag{6}$$

und das Magnetfeld zeigt in eine beliebige Richtung $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)^\mathrm{T}$. Dann sind die Energieflächen dreiachsige Ellipsoide, deren Halbachsen durch die drei effektiven Massen m_1, m_2 und m_3 bestimmt sind. Alle Energieflächen haben Schnittflächen mit Ebenen senkrecht zum Magnetfeld, die die Form von Ellipsen haben. Die Zyklotronmasse lautet dann

$$m_c^\star = \sqrt{\frac{(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)\, m_1 m_2 m_3}{B_1^2 m_1 + B_2^2 m_2 + B_3^2 m_3}} \ . \tag{7}$$

3. Entartung der Landau-Niveaus: (5 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass die Brioullinzone in zylindrische Flächen zerfällt, wenn ein Magnetfeld präsent ist. Diese Flächen werden Landau-Niveaus oder auch Landau-Levels genannt. Die zugehörigen Energien sind hoch entartet.

Berechnen Sie quasiklasisch den Entartungsgrad der Landau-Niveaus $N(B)$. Das Ergebnis lautet

$$N(B) = \frac{BA}{\Phi_0} = \frac{\Phi_A}{\Phi_0} \ , \tag{8}$$

wobei A die Fläche des Festkörpers in der Bewegungsebene senkrecht zum Magnetfeld ist. $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$ ist das Dirac'sche Flußquant.