Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik

Prof. Dr. Gerd Schön
Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_444.php

ÜBUNGSBLATT NR. $\boxed{11}$
Theorie der kondensierten Materie II, SS 2012

Ausgabe **13.07.12**
Besprechung **20.07.12**

1 | Gradientenentwicklung des ⊗-Produktes (4 Punkte)

Zeigen Sie, explizit, dass die ersten Terme einer entwicklung in den Gradienten der Wignertransformierte des ⊗-Produktes die folgende Form haben

$$\Big(A \otimes B\Big) = AB + \frac{i}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} A \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} B - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} A \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} B - \partial_t A \partial_E B + \partial_E A \partial_t B\right) + \dots \tag{1}$$

Anmerkung: Die Wigner-Transformation lautet
$C(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) = \int d^3\rho \int d\tau C(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, t + \frac{\tau}{2}; \boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, t - \frac{\tau}{2}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho} - iE\tau}$.

2 | Spektrale Dichte in der Gradienten-Näherung (4 Punkte)

Die Linke- und die Rechte Dyson-Gleichungen der Retardierten/Advancierten GF sind gegeben durch

$$(G_0^{-1} - \Sigma^{R(A)}) \otimes G^{R(A)} = \delta(1 - 1'), \qquad G^{R(A)} \otimes (G_0^{-1} - \Sigma^{R(A)}) = \delta(1 - 1') \tag{2}$$

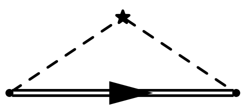
wobei $G^{-1} = i\partial_t - (\xi(-i\boldsymbol{\nabla}) - \mu + U(\boldsymbol{r}, t))$. Zeigen Sie, dass die spektrale Dichte $A = i(G^R - G^A)$ in der Gradienten-Näherung durch

$$A(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) = \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t)}{\Big(E - \xi_{\boldsymbol{k}} - U(\boldsymbol{r}, t) - \mathrm{Re}\Sigma^R(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t)\Big)^2 + \Big(\frac{\Gamma(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t)}{2}\Big)^2} \tag{3}$$

gegeben ist, wobei $\Gamma = i(\Sigma^R - \Sigma^A)$ und $\mathrm{Re}\Sigma^R = \frac{1}{2}(\Sigma^R + \Sigma^A)$.

3 | Boltzmann Gleichung mit Störstellenstreuung (12 Punkte)

Wir betrachten ein Elektronengas mit schwacher Wechselwirkung mit zufälligen Störstellen. Die Selbstenergie ist in der selbstkonsistenten Born-Näherung durch

$\bar{\Sigma}(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) =$  $= n_i \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} |V_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')|^2 \bar{G}(\boldsymbol{k}', E, \boldsymbol{r}, t)$ (4)

gegeben, wobei

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} G^R & G^K \\ 0 & G^A \end{pmatrix}, \qquad \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma^R & \Sigma^K \\ 0 & \Sigma^A \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Mit der Parametrisierung $G^K(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) = -iA(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t)h(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t)$, wobei $A = i(G^R - G^A) \approx 2\pi\delta(E - \xi_{\boldsymbol{k}} - U(\boldsymbol{r}, t))$, erfüllt die Verteilungsfunktion h, unter Anlegung eines externen Potenzials $U(\boldsymbol{r}, t)$, die Boltzmann-Gleichung

$$(\partial_t + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\xi_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} U(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}})\, h(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t) = \tilde{I}[h]. \tag{6}$$

a) (2 Punkt) Welche sind die Bedingungen der Gültigkeit der Boltzmann-Gleichung mit der hier benutzten Form der Selbstenergie?

b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Form des Stoßintegrals $\tilde{I}[h]$. Zeigen Sie, dass das Stoßintegral, wenn ausgedrückt durch $f = (1 - h)/2$, die klassische Form

$$I[f] = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[W(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t) - W(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') f(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{r}, t)\right] \tag{7}$$

nimmt.

c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Stromerhaltungsgleichung $\partial_t \rho(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = 0$ durch Integration der Boltzmann-Gleichung (6) über $\boldsymbol{k}$ erhalten werden kann.