TKM2 Übungsblatt 9: Lösungen

July 20, 2012

1 | **Gradientenentwicklung des $\otimes$-Produktes** **(4 Punkte)**

Lasst uns erst einmal die Gradientenentwickling in einer Variable zeigen wobei das $\otimes$-Produkt die Form

$$(A \otimes B)(x,y) = \int ds A(x,s)B(s,y) \tag{1}$$

Die inverse Wigner-Transformation lautet

$$A(x,s) = \int \frac{dk_1}{2\pi} A(k_1, \tfrac{x+s}{2}) e^{ik_1(x-s)}, \qquad B(s,y) = \int \frac{dk_2}{2\pi} B(k_2, \tfrac{s+y}{2}) e^{ik(s-y)} \tag{2}$$

Schreiben wir

$$\begin{aligned} \frac{x+s}{2} &= \frac{x+y}{2} + \left(\frac{x+s-x-y}{2}\right) = r - \left(\frac{y-s}{2}\right) \\ \frac{y+s}{2} &= \frac{x+y}{2} + \left(\frac{y+s-x-y}{2}\right) = r - \left(\frac{x-s}{2}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $r = \frac{x+y}{2}$, und entwickeln

$$\begin{aligned} A(k_1, r - \tfrac{y-s}{2}) &\approx A(k_1, r) - \left(\tfrac{y-s}{2}\right) \partial_r A(k_1, r) + \dots \\ B(k_2, r - \tfrac{x-s}{2}) &\approx B(k_2, r) - \left(\tfrac{x-s}{2}\right) \partial_r B(k_1, r) + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

gibt dann

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(x,y) = \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi} \int ds \Big[& A(k_1,r)B(k_2,r) e^{ik_1(x-s)} e^{ik_2(s-y)} \\ & - \partial_r A(k_1,r) B(k_2,r) \left(\frac{y-s}{2}\right) e^{ik_1(x-s)} e^{ik_2(s-y)} \\ & - A(k_1,r) \partial_r B(k_1,r) \left(\frac{x-s}{2}\right) e^{ik_1(x-s)} e^{ik_1(s-y)} \\ & + \dots \Big] \end{aligned} \tag{5}$$

Für den ersten Term auf der linken Seite bekommen wir

$$\int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi} A(k_1,r)B(k_2,r) \underbrace{\int ds e^{ik_1(x-s)} e^{ik_2(s-y)}}_{2\pi\delta(k_1-k_2)e^{ik_1(x-y)}} = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} A(k,r)B(k,r) \tag{6}$$

Für den zweiten Term benutzen wir

$$i\partial_{k_2}\left(e^{ik_1(x-s)}e^{-ik_2(y-s)}\right) = (y-s)e^{ik_1(x-s)}e^{-ik_2(y-s)} \tag{7}$$

und schreiben ihn dann auf die Form

$$-\frac{i}{2}\int\frac{dk_1}{2\pi}\int\frac{dk_2}{2\pi}\partial_r A(r,k_1)B(r,k_2)\partial_{k_2}\left(\underbrace{\int dse^{ik_1(x-s)}e^{-ik_2(y-s)}}_{2\pi\delta(k_1-k_2)e^{ik_1(x-y)}}\right) \tag{8}$$

Machen wir dann eine Partielle integration[1] haben wir

$$\frac{i}{2}\int\frac{dk_1}{2\pi}\int\frac{dk_2}{2\pi}\partial_r A(r,k_1)\partial_{k_2}B(r,k_2)\left(\underbrace{\int dse^{ik_1(x-s)}e^{-ik_2(y-s)}}_{2\pi\delta(k_1-k_2)e^{ik_1(x-y)}}\right) = \frac{i}{2}\int\frac{dk}{2\pi}\partial_r A(r,k)\partial_k B(r,k)e^{ik(x-y)} \tag{9}$$

Auf die selbe Art bekommen wir für den zweiten Term

$$\frac{i}{2}\int\frac{dk_1}{2\pi}\int\frac{dk_2}{2\pi}A(r,k_1)\partial_r B(r,k_2)\partial_{k_1}\left(\underbrace{\int dse^{ik_1(x-s)}e^{-ik_2(y-s)}}_{2\pi\delta(k_1-k_2)e^{ik_1(x-y)}}\right) = -\frac{i}{2}\int\frac{dk}{2\pi}\partial_k A(r,k)\partial_r B(r,k)e^{ik(x-y)} \tag{10}$$

Also haben wir

$$(A\otimes B)(x,y) = \int\frac{dk}{2\pi}e^{ik(x-y)}\left[1+\frac{i}{2}(\partial_r^A\partial_k^B - \partial_k^A\partial_r^B)+\dots\right]A(k,r)B(k,r) \tag{11}$$

Nehmen wir dann die Wigner-Transformation haben wir letztendlich

$$(A\otimes B)(k,r) = A(k,r)B(k,r) + \tfrac{i}{2}\left(\partial_r^A\partial_k^B - \partial_k^A\partial_r^B\right)A(k,r)B(k,r)+\dots \tag{12}$$

Die Berechnung für $(A\otimes B)(\boldsymbol{k},E,\boldsymbol{r},t)$ kann analog durchgefürt werden indem wir die Vierervektoren $r=(\boldsymbol{r},t)$ und $k=(\boldsymbol{k},E)$ definieren wie auch das Produkt

$$k^T\eta r = -Et + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \tag{13}$$

wobei $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ die Minkowski-Metrik darstellt. Am ende bekommt man (analog zu der vorigen berechnung)

$$(A\otimes B)(k,r) = A(k,r)B(k,r) + \frac{i}{2}\left(\partial_r^A\eta\partial_k^B - \partial_k^A\eta\partial_r^B\right)A(k,r)B(k,r)+\dots \tag{14}$$

oder

$$\begin{aligned}(A\otimes B)(\boldsymbol{k},E,\boldsymbol{r},t) =& A(\boldsymbol{k},E,\boldsymbol{r},t)B(\boldsymbol{k},E,\boldsymbol{r},t)\\ &+\frac{i}{2}\left(-\partial_t^A\partial_E^B + \partial_E^A\partial_t^B + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}^A\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}^B - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}^A\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}^B\right)A(\boldsymbol{k},E,\boldsymbol{r},t)B(\boldsymbol{k},E,\boldsymbol{r},t)\\ &+\dots\end{aligned} \tag{15}$$

[1] $\int_a^b dx f(x)(\partial_x g(x)) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b(\partial_x f(x))g(x)dx$. Der erste Term gibt in unserem fall 0 da wir eine δ-Funktion in dem Integranden haben.

Anmerkung: Es ist nicht schwierig auch die allgemeine Relation

$$(A \otimes B)(k,r) = e^{\frac{i}{2}(\partial_r^A \partial_k^B - \partial_k^A \partial_r^B)} A(k,r)B(k,r)$$

zu zeigen, wenn wir einsehen dass die volle Entwicklung in Gl. (4) die Form

$$\begin{aligned} A(k_1, r - \tfrac{y-s}{2}) &= e^{-\frac{(y-s)}{2}\partial_r} A(k_1,r) \\ B(k_1, r - \tfrac{x-s}{2}) &= e^{-\frac{(x-s)}{2}\partial_r} B(k_1,r) \end{aligned} \tag{16}$$

hat. Setzen wir dies ein haben wir

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(x,y) &= \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi} \int ds e^{ik_1(x-s)} e^{-ik_2(y-s)} e^{-\frac{(y-s)}{2}\partial_r^A} A(k_1,r) e^{-\frac{(x-s)}{2}\partial_r^B} B(k_2,r) \\ &= \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi} \int ds e^{\frac{i}{2}\partial_{k_2}\partial_r^A} \left(e^{-ik_2(y-s)} A(k_1,r)\right) e^{-\frac{i}{2}\partial_{k_1}\partial_r^B} \left(e^{ik_1(x-s)} B(k_2,r)\right) \\ &= \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi} e^{\frac{i}{2}\left(\partial_{k_2}\partial_r^A - \partial_{k_1}\partial_r^B\right)} \underbrace{\int ds e^{ik_1(x-s)} e^{-ik_2(y-s)}}_{2\pi\delta(k_1-k_2)e^{ik_1(x-y)}} A(k_1,r)B(k_2,r) \end{aligned} \tag{17}$$

wobei wir in dem Schritt zwischen der letzten und vorletzten Gleichung die Eigenschaft $e^{i\partial_k b} e^{ika} = e^{ika} e^{-ab}$ benutzt haben. Wir haben dann letztendlich

$$(A \otimes B)(x,y) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} e^{\frac{i}{2}\left(\partial_k^B \partial_r^A - \partial_k^A \partial_r^B\right)} A(k,r)B(k,r) \tag{18}$$

2 Spektrale Dichte in der Gradienten-Näherung (4 Punkte)

Die linke Dyson-Gleichung wird geschrieben

$$(G_0^{-1} - \Sigma^R) \times G^{R(A)} = \delta(1 - 1') \tag{19}$$

Wenn das angelegte (externe) Potential abgeschaltet ist (in der fernen Vergangnenheit, d.h. wir haben $\lim_{t\to-\infty} U(\boldsymbol{r}, t) \to 0$), ist dass System translationsinvariant (die GF hängen nicht von den Schwerpunktsvariablen ab). Die Wigner-Transformierte dieser Gleichung ist dann einfach

$$\Big(G_0^{-1}(\boldsymbol{k}, E) - \Sigma^{R(A)}(\boldsymbol{k}, E)\Big) G^{R(A)}(\boldsymbol{k}, E) = 1 \tag{20}$$

Mit der Lösung

$$G^R(\boldsymbol{k}, E) = \frac{1}{G_0^{-1}(\boldsymbol{k}, E) - \Sigma^{R(A)}(\boldsymbol{k}, E)} \tag{21}$$

Für $U(\boldsymbol{r}, t) \neq 0$ können wir die Bewegungsgleichungen besser lösen indem wir die linke- und die rechte Dyson-Gleichung subtrahieren und haben dann

$$\left[G_0^{-1} - \Sigma^{R(A)} \underset{,}{\otimes} G^{R(A)}\right]_- = 0 \tag{22}$$

In der Gradienten-Näherung wird dies

$$\left[G_0^{-1} - \Sigma^{R(A)}, G^{R(A)}\right]_p = 0 \tag{23}$$

Wir notieren, dass $[X, f(X)]_p = 0$ für beliebige Funktion f. Deshalb sollte $G^{R(A)}$ eine Funktion von $G_0^{-1} - \Sigma^{R(A)}$ sein. Insbesondere haben wir

$$[G_0^{-1} - \Sigma^{R(A)}, \frac{1}{(G_0^{-1} - \Sigma^{R(A)})}]_p = 0 \tag{24}$$

und können nun dank der Lösung für $t \to -\infty$ feststellen das die Lösung die Form

$$G^{R(A)}(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{G_0^{-1}(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) - \Sigma^{R(A)}(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t)} \tag{25}$$

haben muss. Mit $H(-i\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{r}, t) = \xi(-i\boldsymbol{\nabla})^2 + U(\boldsymbol{r}, t)$, wobei $\xi(-i\boldsymbol{\nabla}) = (-i\boldsymbol{\nabla})^2/2m - \mu$ gilt

$$\begin{aligned}
G_0^{-1}(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) &= \int d^3\rho d\tau \Big(i\partial_t - H\left(-i\boldsymbol{\nabla}_1, \boldsymbol{r}_1, t_1\right)\Big)\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{1'})\delta(t_1 - t_{1'})e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{1'}) - iE(t_1 - t_{1'})} \\
&= \int d^3\rho d\tau (E - H(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}_1, t_1))\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{1'})\delta(t_1 - t_{1'})e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{1'}) - iE(t_1 - t_{1'})} \\
&= \int d^3\rho d\tau (E - H(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r} + \tfrac{\boldsymbol{\rho}}{2}, t + \frac{\tau}{2}))\delta(\boldsymbol{\rho})\delta(\tau)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho} - iE\tau} \\
&= E - H(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t) \\
&= E - \xi_{\boldsymbol{k}} - U(\boldsymbol{r}, t)
\end{aligned} \tag{26}$$

und somit

$$G^{R(A)}(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{E - \xi_{\boldsymbol{k}} - U(\boldsymbol{r}, t) - \Sigma^{R(A)}(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t)} = \frac{1}{(E - \xi_{\boldsymbol{k}} - U - \mathrm{Re}\Sigma) \pm i\frac{\Gamma}{2}} \tag{27}$$

wobei $\Sigma^{R(A)} = \mathrm{Re}\Sigma \pm \frac{i}{2}\Gamma$ benutzt wurde. Per Definition wird die spektrale Dichte $A = i(G^R - G^A)$ dann

$$A(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) = \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t)}{\Big(E - \xi_{\boldsymbol{k}} - U(\boldsymbol{r}, t) - \mathrm{Re}\Sigma(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t)\Big)^2 + \Big(\frac{\Gamma(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t)}{2}\Big)^2} \tag{28}$$

3 | Boltzmann Gleichung mit Störstellenstreuung (12 Punkte)

a) Die Born-Näherung vernachlässigt gekreutzte Diagramme. Die Bedingung dass diese Näherung gültig sei, ist $\ell \gg 1/k_F$ wobei $\ell = v_F\tau$, oder anders geschrieben $\tau^{-1} \ll E_F$, wobei $\tau^{-1} \sim n_i \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} |V_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{k}_F - \boldsymbol{k}')|^2 \delta(E_F - \xi_{\boldsymbol{k}'})$. Ausserdem müssen die Karakteristischen Frequenzen des angelegten Feldes $1/\omega \gg 1/E_F$ und die karakteristischen Wellenvektoren $1/q \gg 1/k_F$. Zusammen können wir dann schreiben

$$\tau^{-1}, \omega_0 \ll E_F, \qquad \ell^{-1}, q \ll k_F \tag{29}$$

b) Wir haben

$$\Sigma^{R(A)}(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) = n_i \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} |V_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')|^2 \Sigma^{R(A)}(\boldsymbol{k}', E, \boldsymbol{r}, t) \tag{30}$$

und deswegen

$$\Gamma(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) = i(\Sigma^R - \Sigma^A) = n_i \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} |V_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')|^2 A(\boldsymbol{k}', E, \boldsymbol{r}, t) \tag{31}$$

Ausserdem haben wir mit $G^K = -iAh$

$$\Sigma^K(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) = -in_i \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} |V_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')|^2 A(\boldsymbol{k}', E, \boldsymbol{r}, t) h(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{r}, t) \tag{32}$$

Also haben wir auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung der Keldysh-Komponente der GF

$$i\Sigma^K A - \Gamma G^K = -A(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) n_i \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} |V_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')|^2 A(\boldsymbol{k}', E, \boldsymbol{r}, t) \Big(h(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{r}, t) - h(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t)\Big) \tag{33}$$

Setzen wir $A(\boldsymbol{k}, E, \boldsymbol{r}, t) = 2\pi\delta(E - \xi_{\boldsymbol{k}} - U(\boldsymbol{r}, t))$ und integrieren die Bewegungsgleichung über E haben wir auf der rechten Seite

$$\tilde{I}[h] = 2\pi n_i \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} |V_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')|^2 \delta(\xi_{\boldsymbol{k}} - \xi_{\boldsymbol{k}'}) \Big(h(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{r}, t) - h(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t)\Big) \tag{34}$$

Definieren wir

$$W(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = 4\pi n_i |V_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')|^2 \delta(\xi_{\boldsymbol{k}} - \xi_{\boldsymbol{k}'}) = W(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k})$$

und Schreiben $h = 1 - 2f$ haben wir

$$\tilde{I}[h] = I[f] = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \Big(W(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t) - W(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') f(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{r}, t)\Big) \tag{35}$$

Anmerkung: Da $W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = W(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})$ kann das Stoßintegral auch auf die folgende Form gebracht werden (Kurznotation $f_{\boldsymbol{k}} = f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r},t)$):

$$I[f] = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \left(W_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} f_{\boldsymbol{k}} \left(1 - f_{\boldsymbol{k}'}\right) - W_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}}(1 - f_{\boldsymbol{k}}) f_{\boldsymbol{k}'} \right) \tag{36}$$

Diese Form ist eine allgemeinere Form des Stoßintegrals und spiegelt die Physik (Rein-, Rausstreuung) etwas besser als die klassische Form wieder. Der Grund weshalb diese Form hier auf die klassische Form vereinfacht werden kann ist wie gesagt die Eigenschaft $W_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} = W_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}}$, diese Eigenschaft kommt von der Born-Näherung.

---

c) Integrieren wir erst die rechte Seite (das Stoßintegral) haben wir

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} I[f] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r},t) - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} W(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}) f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{37}$$

Dies folgt daraus, dass unter dem integral die variablen $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{k}'$ vertauscht werden können. Integrieren wir nun die linke Seite

$$\partial_t \underbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r},t)}_{\rho(\boldsymbol{r},t)} + \underbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \xi_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r},t)}_{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} U(\boldsymbol{r},t) \cdot \underbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{k},r,t)}_{f(|\boldsymbol{k}|\to\infty)=0} \tag{38}$$

also $\partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{j} = 0$. Bei dem zweiten Term haben wir benutzt dass (siehe $\xi_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}^2/2m - \mu \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \xi_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/m = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}$)

$$\boldsymbol{j} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} \xi_{\boldsymbol{k}}) f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r},t) \tag{39}$$