Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik

Prof. Dr. Gerd Schön
Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_444.php

ÜBUNGSBLATT NR. $\boxed{3}$
Theorie der kondensierten Materie II, SS 2012

Ausgabe **04.05.12**
Besprechung **11.05.12**

1 | Matsubara Summen

a) Finden Sie die komplexen Pole, und die dazugehörenden Residuen, der Bose-Einstein und Fermi-Dirac Verteilungsfunktionen **(2 Punkte)**

$$n_F(z) = \frac{1}{e^{\beta z}+1}, \qquad n_B(z) = \frac{1}{e^{\beta z}-1}. \tag{1}$$

b) Es gilt, dass ein komplexes Integral über eine Funktion $n_{B/F}(z)h(z)$ mit einer Kontur die nur die Pole z_n von $n_{F/B}(z)$ einschließt, aber keine der Pole in $h(z)$, gegeben ist durch **(2 Punkte)**

$$\oint_{\mathcal{C}} dz\; n_{B/F}(z)h(z) = 2\pi i \sum_{z_n} \mathrm{Res}_{z_n}\big[n_{B/F}(z)\big]\, h(z_n). \tag{2}$$

Benutzen Sie dies um eine allgemeine so genannte **Matsubara Summe**

$$S(\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} h(i\omega_n), \tag{3}$$

als komplexes Integral umzuschreiben. Die Kontur wird von den analytischen Eigenschaften von der noch unbekannten Funktion $g(z)$ abhängen.

c) Berechnen Sie die Matsubara Summe **(4 Punkte)**

$$S(\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} g(i\omega_n)e^{i\omega_n\tau}, \qquad 0<\tau<\beta \tag{4}$$

für eine Funktion $g(z)$ die in dem ganzen komplexen Raum analytisch ist, außer bei zählbar vielen isolierten Punkten z_j (die Pole von $g(z)$), und nicht divergiert für $|z| \to \infty$. Berechnen Sie für eine solche Funktion die Summe $S(\tau)$ indem Sie eine angemessene geschlossene Kontur $\mathcal{C}$ wählen. Sie dürfen annehmen dass die Funktion $g(z)$ die Form

$$g(z) = \Pi_j \frac{1}{z-z_j} \tag{5}$$

hat.

d) Berechnen Sie die Matsubara Summen **(4 Punkte)**

$$\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} G_0(\boldsymbol{k}, i\omega_n)e^{i\omega_n\tau}, \quad \text{und} \quad \frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} G_0(\boldsymbol{k}, i\omega_n)G_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}, i\omega_n+i\omega_m), \tag{6}$$

wobei $G_0(\boldsymbol{k}, i\omega_m) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{k}}}$, mit $\xi_{\boldsymbol{k}} = \epsilon_{\boldsymbol{k}} - \mu$ und $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$.

e) Nehmen Sie jetzt an, dass die Funktion $g(z)$ aus Teilaufgabe **c)** in dem ganzen komplexen Raum analytisch ist, außer auf der reellen Achse. Wählen Sie eine angemessene Kontur um die Summe $S(\tau)$ als reelles Integral **(4 Punkte)**

$$S(\tau) = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} n_{B/F}(\omega) a(\omega) e^{\omega\tau}, \qquad 0 < \tau < \beta. \tag{7}$$

mit $\epsilon = -1$ für Bosonen, $\epsilon = +1$ für Fermionen, und $a(\omega) = i\left(g(\omega + i\delta) - g(\omega - i\delta)\right)$, auszudrücken.

f) Die freie Energie $F = -k_B T \ln Z$ für ein nicht wechselwirkendes System von Fermionen kann durch die Matsubara Green'schen Funktionen ausgedrückt werden: **(4 Punkte)**

$$F = -\frac{1}{\beta} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\omega_n} \ln\left[-G_0^{-1}(\boldsymbol{k}, i\omega_n)\right] e^{i\omega_n 0^+}. \tag{8}$$

Zeigen Sie, dass nach Berechnung der Summe über ω_n, dieser Ausdruck die bekannte Form

$$F = -k_B T \ln Z, \qquad Z = \Pi_{\boldsymbol{k}}(1 + e^{-\beta\xi_{\boldsymbol{k}}}) \tag{9}$$

nimmt. Bedenken Sie bei der Auswertung der Summe, dass $\ln(x)$ einen Verzweigungsschnitt entlang der reellen Achse $x \in (-\infty, 0)$ hat.