KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK

Prof. Dr. Gerd Schön
Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_444.php

ÜBUNGSBLATT NR. $\boxed{4}$
Theorie der kondensierten Materie II, SS 2012

Ausgabe **11.05.12**
Besprechung **25.05.12**

1 | Feynman-Regeln für eine Dreiteilchenwecheslwirkung (5 Punkte)

Gegeben sei ein Fermigas mit Spinentartung $n_s = 2S + 1$ und Dichte $n_s\rho$, wobei ρ die Dichte pro Spinentartung ist. In diesem Fermigas soll nun eine Dreiteilchenwecheslwirkung

$$V(r_i, r_j, r_k) = \lambda\delta^{(3)}(r_i - r_j)\delta^{(3)}(r_j - r_k) \tag{1}$$

eingeschaltet werden.

a) (1 Punkt) Stellen sie diese Wechselwirkung als Operator im Sinne der zweiten Quantisierung dar.

b) (1 Punkt) Führen sie ein Symbol für die Dreiteilchenwechselwirkung ein und formulieren sie die zugehörigen Feynman-Regeln.

c) (2 Punkte) Verwenden sie diese Regeln um die Wechselwirkungsenergiedichte in erster Ordnung in λ zu berechnen.
(Berechnen sie $\langle V\rangle$ für ein thermalisiertes Fermigas.)

d) (1 Punkt) Begründen sie, warum die Wechselwirkung für $n_S \leq 2$ verschwinden muss.

2 | Dichte-Dichte Green-Funktion

a) (2 Punkte) Gegeben sei ein freies Elektronengas, und wir suchen die Dichte-Dichte Green-Funktion

$$\chi_0^R(\mathbf{q}, \tau) = -\frac{1}{\mathcal{V}}\langle T_\tau \hat{\rho}_\mathbf{q}(\tau)\hat{\rho}_{-\mathbf{q}}(0)\rangle \quad , \quad \hat{\rho}_\mathbf{q}(\tau) = \sum_\mathbf{k} \hat{c}^\dagger_\mathbf{k}(\tau)\hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}(\tau)\,. \tag{2}$$

Benutzen sie das Wick-Theorem um die Dichte-Dichte Green-Funktion in Einteilchen-Green-Funktionen der Form $\langle \hat{c}^\dagger_{\bar{\mathbf{k}}}(\tau)\hat{c}_{\bar{\mathbf{k}}'}(0)\rangle$ umzuschreiben. Finden sie dann das Diagramm, das die Dichte-Dichte Green-Funktion beschreibt. Berechnen sie eine explizite Lösung.

b) (5 Punkte) Gegeben sei ein Elektronengas beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$H = H_0 + H_\text{int} \quad , \quad H_0 = \sum_\mathbf{k} \xi_\mathbf{k}\hat{c}^\dagger_\mathbf{k}\hat{c}_\mathbf{k} \quad , \quad H_\text{int} = \frac{1}{2\mathcal{V}}\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}',\mathbf{q}\neq 0} V_c(\mathbf{q})\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}\hat{c}_{\mathbf{k}'}\hat{c}_\mathbf{k}\,. \tag{3}$$

Finden sie eine Bewegungsgleichung für die Dichte-Dichte Green-Funktion

$$\chi^R(\mathbf{q}, \tau) = -\frac{1}{\mathcal{V}}\langle T_\tau \hat{\rho}_\mathbf{q}(\tau)\hat{\rho}_{-\mathbf{q}}(0)\rangle \quad , \quad \hat{\rho}_\mathbf{q}(\tau) = \sum_\mathbf{k} \hat{c}^\dagger_\mathbf{k}(\tau)\hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}(\tau)\,. \tag{4}$$

Benutzen sie dann die Näherung,

$$\hat{c}^\dagger_\mathbf{k}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}\hat{c}_{\bar{\mathbf{k}}}\hat{c}_{\bar{\mathbf{k}}'} = c^\dagger_\mathbf{k}c_{\bar{\mathbf{k}}'}n_F(\xi_{k'})\delta_{\mathbf{k}',\bar{\mathbf{k}}} + n_F(\xi_k)\delta_{\mathbf{k},\bar{\mathbf{k}}'}c^\dagger_{\mathbf{k}'}c_{\bar{\mathbf{k}}} \tag{5}$$

um eine explizite Form für die Dichte-Dichte Green-Funktion im Frequenzraum zu finden.

c) (6 Punkte) Gegeben sei wieder das Elektronengas beschrieben durch den Hamilton-Operator (3). Entwickeln sie die Dichte-Dichte Green-Funktion (4), in einer Serie von Diagrammen aus der freien Green-Funktion (2), verbunden mit einer Wechselwirkungslinie. Berechnen sie für diese diagrammatische Entwicklung die Dichte-Dichte Green-Funktion.
(Hinweis: Es sollte das selbe herausgekommen wie in Aufgabenteil 2b)

3 | Abgeschirmtes Coulombpotential und Plasmafrequenz (2 Punkte)

Das abgeschirmte Coulombpotential wurde in der Vorlesung eingeführt,

$$\tilde{V}_c(\mathbf{q}, \omega) = \varepsilon^{-1}(\boldsymbol{q}, \omega) V_c(\mathbf{q}, \omega) \tag{6}$$

mit dem Coulombpotential $V_c(\mathbf{q}, \omega)$ und der in der Vorlesung diskutierten dielektrischen Funktion,

$$\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{q}, \omega) = \frac{1}{1 - V_c(\mathbf{q}, \omega)\chi_0^R(\mathbf{q}, \omega)} \,. \tag{7}$$

Die freie Dichte-Dichte Green-Funktion/Polarisationsbubble wurde in Aufgabe 2a) berechnet.

a) (1 Punkt) Zeigen sie, dass die dielektrische Funktion, auch als folgende Funktion der Dichte-Dichte Green-Funktion aus Aufgabe 2c) geschrieben werden kann,

$$\varepsilon^{-1} = 1 + V_c(\mathbf{q}, \omega)\chi^R(\mathbf{q}, \omega) \,. \tag{8}$$

Berechnen Sie dann, für $T = 0$, die Fouriertransformation von $\tilde{V}_c(\boldsymbol{q}, 0)$.

b) (1 Punkt) Entwickeln Sie die ungestörte Suszeptibilität $\chi_0^R(\boldsymbol{q}, \omega)$ zu zweiter Ordnung in $\boldsymbol{q}$. Finden Sie danach die Frequenz $\omega = \omega_p$ für die $\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{q}, \omega)$ divergiert. Die Divergenz weist auf eine Resonanz mit kollektiven Moden des wechselwirkenden Elektronengases hin, die als Plasmaoszillationen bekannt sind.