Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik

Prof. Dr. Gerd Schön
Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_444.php

ÜBUNGSBLATT NR. $\boxed{5}$
Theorie der kondensierten Materie II, SS 2012

Ausgabe **25.05.12**
Besprechung **01.06.12**

1 Strom-Strom Green'sche Funktion mit Störstellen (6 Punkte)

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, kann die Strom-Strom Green'sche Funktion durch die 2-Teilchen Green'sche Funktion ausgedrückt werden,

$$G^{jj}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},\tau;\boldsymbol{r}',\tau') = \frac{2e^2}{4m^2}\left(\boldsymbol{\nabla}_{2'\beta} - \boldsymbol{\nabla}_{1'\beta}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}_{2\alpha} - \boldsymbol{\nabla}_{1\alpha}\right) G_2(2,2';1,1')\Big|_{\substack{\tau_2'=\tau_{1-}';\boldsymbol{r}_2'=\boldsymbol{r}_1' \\ \tau_2=\tau_{1-};\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1}} \tag{1}$$

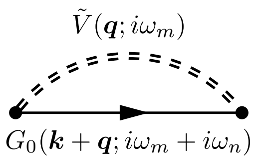
und effektiv $G_2(2,2';1,1') = G(2,1')G(2',1)$. Betrachten Sie ein Elektronengas mit zufälligen Störstellen, und benutzen Sie die Näherung $\langle G(2,1')G(2',1)\rangle = \langle G(2,1')\rangle\langle G(2',1)\rangle$ mit $\langle G(2,1)\rangle = \langle G(2-1)\rangle$ um die Fourier-Transformation

$$G^{jj}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{q},i\omega_m) = \frac{2e^2}{m^2}\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_m} k_\alpha k_\beta G(\boldsymbol{k}-\frac{\boldsymbol{q}}{2}, i\omega_n)G(\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}, i\omega_n + i\omega_m) \tag{2}$$

zu bekommen.
Anmerkung: Hier haben wir $\omega_m = 2\pi m/\beta$ da G^{jj} ein geradzahliges Produkt von Fermi-Operatoren ist) und $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$.

2 Elektron-Elektron Streurate (14 Punkte)

Für ein Elektronengas mit (abgeschirmter) Coulombwechselwirkung ist die Selbstenergie in der RPA-Näherung gegeben durch
(**Anmerkung:** Der Hartree-Term verschwindet weil $V(\boldsymbol{q}=0)=0$ angenommen ist.)

$\Sigma(\boldsymbol{k}, i\omega_n) =$ 

$$= -\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_m}\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\tilde{V}(\boldsymbol{q}, i\omega_m)G_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}; i\omega_n + i\omega_m) \tag{3}$$

wobei (wie in dem letzten Übungsblatt gezeigt)

$$\tilde{V}(\boldsymbol{q}, i\omega_m) = \frac{V(\boldsymbol{q})}{\varepsilon(\boldsymbol{q}, i\omega_m)}, \qquad \begin{aligned} \varepsilon(\boldsymbol{q}, i\omega_m) &= 1 - V(\boldsymbol{q})\chi_0(\boldsymbol{q}, i\omega_m) \\ \chi_0(\boldsymbol{q}, i\omega_m) &= \frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q}})}{i\omega_m - (\xi_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q}} - \xi_{\boldsymbol{k}'})} \end{aligned}$$

die abgeschirmte Coulombwechselwirkung darstellt, und

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, \qquad \omega_m = \frac{2\pi m}{\beta}. \tag{5}$$

Die Elektron-Elektron Streurate ist definiert durch

$$\frac{1}{\tau_{\boldsymbol{k}}} = -2\mathrm{Im}\Sigma^R(\boldsymbol{k}, \xi_{\boldsymbol{k}}) \tag{6}$$

wobei $\Sigma^R(\boldsymbol{k},\omega)=\Sigma(\boldsymbol{k},i\omega_n\to\omega+i\delta)$ durch analytische Fortsetzung von Gl. (3) geben ist.

a) (3 Punkte) Führen Sie die Summation über die Bosonischen Frequenzen durch eine Konturintegration aus. Beachten Sie dabei, dass der Integrand überall analytisch ist, ausser bei $z=\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-i\omega_n$ und auf der reellen Achse. Sie sollten auch sicher stellen, dass Sie bei der Wahl der Kontur nicht die Frequenz $\omega_m=0$ vergessen.

Die Antwort die Sie bekommen sollten, lautet

$$\begin{aligned}\Sigma(\boldsymbol{k},i\omega_n)=&-\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi i}n_B(\epsilon)\left[\tilde{V}(\boldsymbol{q},\epsilon+i\eta)G_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},i\omega_n+\epsilon)-(\eta\to-\eta)\right]\\&-\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})\tilde{V}(\boldsymbol{q},\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-i\omega_n)\end{aligned}\tag{7}$$

wobei $\mathcal{P}$ den Hauptwert darstellt und $\eta\to 0$.

b) (3 Punkte) Jetzt wo die Frequenzsummation durchgeführt ist, können Sie die analytische Fortsetzung durchführen. Benutzen Sie dabei die Relationen $[\tilde{V}(\boldsymbol{q},\epsilon-i\eta)]^*=\tilde{V}(\boldsymbol{q},\epsilon+i\eta)$ und $\mathrm{Im}G_0^R(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q};\epsilon+\omega)=-\pi\delta(\epsilon+\omega-\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})$.

Zeigen Sie, dass die folgende Streurate gegeben ist durch

$$\frac{1}{\tau_{\boldsymbol{k}}}=-2\mathrm{Im}\Sigma^R(\boldsymbol{k},\xi_{\boldsymbol{k}})=-\frac{2}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[n_B(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}})+n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})\right]\mathrm{Im}\left[\tilde{V}(\boldsymbol{q},\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}}+i\eta)\right]\tag{8}$$

c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left[\tilde{V}(\boldsymbol{q},\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}}+i\eta)\right]&\equiv\mathrm{Im}\left[\frac{V(\boldsymbol{q})}{\varepsilon^R(\boldsymbol{q},\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}})}\right]\\&=\left|\tilde{V}(\boldsymbol{q},\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}})\right|^2\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\left(n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'})-n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}})\right)\pi\delta(\xi_{\boldsymbol{k}'}-\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}+\xi_{\boldsymbol{k}})\end{aligned}\tag{9}$$

d) (5 Punkte) Benutzen Sie die Relationen $n_B(\epsilon_1-\epsilon_2)[n_F(\epsilon_2)-n_F(\epsilon_1)]=n_F(\epsilon_1)[1-n_F(\epsilon_2)]$ und $n_F(\epsilon_1)-n_F(\epsilon_2)=n_F(\epsilon_1)[1-n_F(\epsilon_2)]-n_F(\epsilon_2)[1-n_F(\epsilon_1)]$ um die Streurate auf die Form ($n_{\boldsymbol{k}}=n_F(\xi_{\boldsymbol{k}})$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_{\boldsymbol{k}}}=-\frac{2\pi}{\mathcal{V}^2}\sum_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}'}&\left|\tilde{V}(\boldsymbol{q},\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}})\right|^2\delta(\xi_{\boldsymbol{k}'}-\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}+\xi_{\boldsymbol{k}})\times\\&\times\left(-n_{\boldsymbol{k}'}\left(1-n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}\right)\left(1-n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\right)-\left(1-n_{\boldsymbol{k}'}\right)n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\right)\end{aligned}\tag{10}$$

zu bringen. Vernachlässigen Sie nun die Frequenzabhängigkeit der abgeschirmten Coulombwechselwirkung und versuchen Sie, diesen Ausdruck zu interpretieren. Zeigen Sie, dass die Lebensdauer von Quasiteilchen mit Energien $\xi_{\boldsymbol{k}}\to 0$ (Fermienergie) bei $T=0$ divergiert.