TKM2 Übungsblatt 3: Lösungen

June 4, 2012

1 Strom-Strom Green'sche Funktion mit Störstellen

Die 1-Teilchen Green'sche Funktionen können als Fourier-Serie dargestellt werden

$$\langle G(2-1')\rangle = \langle G(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1'; \tau_2 - \tau_1')\rangle = \frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{k}} G(\boldsymbol{k}, i\omega_n) e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{r}_2)} e^{i\omega_n(\tau_1'-\tau_2)} \tag{1}$$

und

$$\langle G(2'-1)\rangle = \langle G(\boldsymbol{r}_2' - \boldsymbol{r}_1; \tau_2' - \tau_1)\rangle = \frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{k}} G(\boldsymbol{k}, i\omega_n) e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2')} e^{i\omega_n(\tau_1-\tau_2')} \tag{2}$$

Die 2-Teilchen Green'sche Funktion können wir nun schreiben als

$$G_2(2,2';1,1') = \frac{1}{\beta^2}\sum_{\omega_n\omega_n'}\frac{1}{\mathcal{V}^2}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} G(\boldsymbol{k}, i\omega_n)G(\boldsymbol{k}', i\omega_n') e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{r}_2)} e^{i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2')} e^{i\omega_n(\tau_1'-\tau_2)} e^{i\omega_n'(\tau_1-\tau_2')} \tag{3}$$

Wenden wir den operator $\hat{D}_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{\nabla}_{2'\beta} - \boldsymbol{\nabla}_{1'\beta})(\boldsymbol{\nabla}_{2\alpha} - \boldsymbol{\nabla}_{1\alpha})$ auf diese Funktion an, und nehmen danach $2 = 1-; 2' = 1'-$ haben wir

$$\begin{aligned} &\hat{D}_{\alpha\beta} G_2(2,2';1,1')\Big|_{2=1;2'=1'} \\ &= \frac{1}{\beta^2}\sum_{\omega_n\omega_n'}\frac{1}{\mathcal{V}^2}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \left(-ik_\beta' - ik_\beta\right)\left(-ik_\alpha - ik_\alpha'\right) G(\boldsymbol{k}, i\omega_n)G(\boldsymbol{k}', i\omega_n') e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot(\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{r}_1)} e^{i(\omega_n-\omega_n')(\tau_1'-\tau_1)} \end{aligned} \tag{4}$$

Wechseln wir zu Koordinaten

$$\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{q}}{2}, \qquad \boldsymbol{k}' \to \boldsymbol{k} + \frac{\boldsymbol{q}}{2} \tag{5}$$

haben wir

$$\begin{aligned} &\hat{D}_{\alpha\beta} G_2(2,2';1,1')\Big|_{2=1;2'=1'} \\ &= -\frac{1}{\beta^2}\sum_{\omega_n\omega_n'}\frac{1}{\mathcal{V}^2}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{q}} 4k_\alpha k_\beta G(\boldsymbol{k}-\frac{\boldsymbol{q}}{2}, i\omega_n)G(\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}, i\omega_n') e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{r}_1)} e^{i(\omega_n-\omega_n')(\tau_1'-\tau_1)} \end{aligned} \tag{6}$$

Nehmen wir die Fourier-Transformation und multiplizieren mit $2e^2/4m^2$ haben wir

$$G^{jj}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{q}, i\omega_m) = -\frac{2e^2}{m^2}\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} k_\alpha k_\beta \; G(\boldsymbol{k}-\frac{\boldsymbol{q}}{2}, i\omega_n)G(\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}, i\omega_n + i\omega_m) \tag{7}$$

2 | Elektron-Elektron Streurate

a) Die Matsubara Summe kann durch ein Konturintegral mit einer Kontur um die Polen $\omega_m = 2m\pi/\beta$ umgeschrieben werden

$$\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_m}\tilde{V}(\boldsymbol{q}, i\omega_m)G_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}, i\omega_n + i\omega_m) = \int_{\mathcal{C}}\frac{dz}{2\pi i}n_B(z)\tilde{V}(\boldsymbol{q}, z)G_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}, i\omega_n + z) \tag{8}$$

Hier wurde $\mathcal{C}$ so gewählt, dass nur die Polen ω_m eingeschlossen sind. Wir können die Kontur in Halbkreisen in der unteren und oberen ebene des komplexen Raumes (da der Integrand nicht analytisch über die reelle Achse ist, können wir nicht einen ganzen Kreis bilden). Dabei müssen wir aber die Pole $z' = \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - i\omega_n$ ausschliessen. Das Integral wird dann

$$\int_{\mathcal{C}} = \fint_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} - \fint_{-\infty-i\eta}^{\infty-i\eta} - \int_{\mathcal{C}'} \tag{9}$$

wobei das Symbol $\fint$ bedeutet dass der punkt $z = 0 \pm i\eta$ von dem Integral ausgeschlossen ist (wegen der Pole $z = \omega_m = 0$), und $\mathcal{C}'$ die Kontur um die Pole $z' = \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - i\omega_n$ bezeichnet. Der letzte Teil des Integrals gibt uns

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}'}\frac{dz}{2\pi i}n_B(z)\tilde{V}(\boldsymbol{q}, z)G_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}, i\omega_n + z) &= \mathrm{Res}_{\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-i\omega_n}\left[\tilde{V}(\boldsymbol{q}, z)G_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}, i\omega_n + z)\right] \\ &= n_B(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - i\omega_n)V(\boldsymbol{q}, \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - i\omega_n) \\ &= -n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})V(\boldsymbol{q}, \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - i\omega_n)\end{aligned} \tag{10}$$

Machen wir den Variabeltausch $z = \epsilon \pm i\eta$ für die anderen Integrale bekommen wir schließlich

$$\begin{aligned}\Sigma(\boldsymbol{k}, i\omega_n) = &-\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi i}n_B(\epsilon)\left[\tilde{V}(\boldsymbol{q}, \epsilon + i\eta)G_0(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}, i\omega_n + \epsilon) - (\eta \to -\eta)\right] \\ &-\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})\tilde{V}(\boldsymbol{q}, \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - i\omega_n)\end{aligned} \tag{11}$$

Anmerkung: Bei dem Argument der Green'schen Funktion $i\omega_n + \omega + i\eta$ können wir einfach $\eta = 0$ setzen. Es ist aussreichend η in dem Argument von $\tilde{V}$ zu behalten.

b) Ersetzen von $i\omega_n \to \epsilon + i\delta$ gibt uns

$$\begin{aligned}\Sigma^R(\boldsymbol{k}, \omega) = &-\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi i}n_B(\omega)\left[\tilde{V}(\boldsymbol{q}, \epsilon + i\eta)G_0^R(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}, \epsilon + \omega) - (\eta \to -\eta)\right] \\ &-\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})\tilde{V}(\boldsymbol{q}, \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - \omega + i\delta) \\ = &-\frac{2}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi}n_B(\epsilon)\mathrm{Im}\left[\tilde{V}(\boldsymbol{q}, \epsilon + i\eta)\right]G_0^R(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}, \epsilon + \omega) \\ &-\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})\tilde{V}(\boldsymbol{q}, \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - \omega + i\delta)\end{aligned} \tag{12}$$

Nehmen wir den Imaginärteil hiervon und schreiben $\delta = \eta$ haben wir (mit $\mathrm{Im}G^R(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}, \epsilon + \omega) = -\pi\delta(\epsilon + \omega - \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})$)

$$\mathrm{Im}\Sigma^R(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[n_B(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - \omega) + n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})\right]\mathrm{Im}\left[\tilde{V}(\boldsymbol{q}, \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - \omega + i\eta)\right] \tag{13}$$

und somit

$$\frac{1}{\tau_{\boldsymbol{k}}} = -2\mathrm{Im}\Sigma^R(\boldsymbol{k},\xi_{\boldsymbol{k}}) = -\frac{2}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[n_B(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}}) + n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})\right]\mathrm{Im}\left[\tilde{V}(\boldsymbol{q},\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}}+i\eta)\right] \tag{14}$$

c) Wir haben

$$\mathrm{Im}\left[\frac{V(\boldsymbol{q})}{\varepsilon^R(\boldsymbol{q},\omega)}\right] = V(\boldsymbol{q})\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\varepsilon^R(\boldsymbol{q},\omega)}\right] = V(\boldsymbol{q})\mathrm{Im}\left[\frac{(\varepsilon^R(\boldsymbol{q},\omega)^*}{|\varepsilon^R(\boldsymbol{q},\omega)|^2}\right] = -\frac{V(\boldsymbol{q})}{|\varepsilon^R(\boldsymbol{q},\omega)|^2}\mathrm{Im}\varepsilon^R(\boldsymbol{q},\omega) \tag{15}$$

Da $\varepsilon^R(\boldsymbol{q},\omega) = 1 - V(\boldsymbol{q})\chi_0^R(\boldsymbol{q},\omega)$ haben wir $\mathrm{Im}\varepsilon^R(\boldsymbol{q},\omega) = -V(\boldsymbol{q})\mathrm{Im}\chi_0^R(\boldsymbol{q},\omega)$ wobei

$$\chi_0^R(\boldsymbol{q},\omega) = \frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q}})}{\omega + i\delta - (\xi_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q}} - \xi_{\boldsymbol{k}'})} = \frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'})}{\omega + i\delta - (\xi_{\boldsymbol{k}'} - \xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}})} \tag{16}$$

und somit $\mathrm{Im}\chi_0^R(\boldsymbol{q},\omega) = \frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\left(n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}})\right)\pi\delta(\xi_{\boldsymbol{k}'} - \xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}} - \omega)$ Ersetzen von $\omega = \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - \xi_{\boldsymbol{k}}$ gibt dann die nachgefragte Relation. Die Streurate ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_{\boldsymbol{k}}} = -\frac{2\pi}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\left|\tilde{V}(\boldsymbol{q},\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}})\right|^2\delta(\xi_{\boldsymbol{k}'} - \xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}} - \xi_{\boldsymbol{k}})\times \\ \times\left(n_B(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}}) + n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})\right)\left(n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}})\right)\end{aligned} \tag{17}$$

d) Von dem erhaltenen Ausdruck haben wir zwei Produkte von Verteilungsfunktionen

$$n_B(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}})\left(n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}})\right) \tag{18}$$

und

$$n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})\left(n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}})\right) \tag{19}$$

Schreiben wir zuerst das erste Produkt um. Wegen der delta-Funktion haben wir dann $\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - \xi_{\boldsymbol{k}} = \xi_{\boldsymbol{k}'} - \xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}$ also setsen wir $\epsilon_1 = \xi_{\boldsymbol{k}'}$ und $\epsilon_2 = \xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}$ haben wir für diesen Term die Form

$$n_B(\epsilon_1 - \epsilon_2)\left(n_F(\epsilon_1) - n_F(\epsilon_2)\right) = -n_F(\epsilon_1)\left[1 - n_F(\epsilon_2)\right] \tag{20}$$

Mit der notation $n_{\boldsymbol{k}} = n_F(\xi_{\boldsymbol{k}})$ haben wir dann

$$\begin{aligned}n_B(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}})\left(n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}})\right) &= -n_{\boldsymbol{k}'}\left(1 - n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\right) \\ &= -n_{\boldsymbol{k}'}\left(1 - n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} + n_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}}\right)\left(1 - n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\right) \\ &= -n_{\boldsymbol{k}'}(1 - n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})\left(1 - n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\right) - n_{\boldsymbol{k}'}n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}\left(1 - n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\right)\end{aligned} \tag{21}$$

wobei die letzen zwei Umschreibungen sich später als nützlich erweisen werden.

Für das Zweite Produkt schreiben wir erst

$$\left(n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}})\right) = n_F(\epsilon_1) - n_F(\epsilon_2) = n_F(\epsilon_1)\left[1 - n_F(\epsilon_2)\right] - n_F(\epsilon_2)\left[1 - n_F(\epsilon_1)\right] \tag{22}$$

Benutzen wir dann wieder die Notation $n_{\boldsymbol{k}} = n_F(\xi_{\boldsymbol{k}})$ haben wir

$$\begin{aligned}n_F(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})\left(n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}})\right) &= n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}\left(n_{\boldsymbol{k}'}\left[1 - n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\right] - n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\left[1 - n_{\boldsymbol{k}'}\right]\right) \\ &= n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}n_{\boldsymbol{k}'}\left[1 - n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\right] - n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\left[1 - n_{\boldsymbol{k}'}\right]\end{aligned} \tag{23}$$

Der Grund für die Umschreibung des ersten Termes sollte nun deutlich sein da wenn wir die beiden Beiträge wir

$$-n_{\boldsymbol{k}'}\left(1-n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}\right)\left(1-n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\right)-n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\left(1-n_{\boldsymbol{k}'}\right) \tag{24}$$

bekommen. Setzen wir alles zusammen haben wir dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_{\boldsymbol{k}}}=-\frac{2\pi}{\mathcal{V}^2}\sum_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}'}\left|\tilde{V}(\boldsymbol{q},\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}})\right|^2 &\delta(\xi_{\boldsymbol{k}'}-\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}+\xi_{\boldsymbol{k}})\times\\ &\times\Big(-n_{\boldsymbol{k}'}\left(1-n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}\right)\left(1-n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\right)-\left(1-n_{\boldsymbol{k}'}\right)n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\Big)\end{aligned} \tag{25}$$

Vernachlässigen wir die Frequenzabhängigkeit von $\tilde{V}$ so haben wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_{\boldsymbol{k}}}=-\frac{2\pi}{\mathcal{V}^2}\sum_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}'}\left|\tilde{V}(\boldsymbol{q},0)\right|^2 &\delta(\xi_{\boldsymbol{k}'}-\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}-\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}+\xi_{\boldsymbol{k}})\times\\ &\times\Big(-n_{\boldsymbol{k}'}\left(1-n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}\right)\left(1-n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\right)-\left(1-n_{\boldsymbol{k}'}\right)n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}n_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}\Big)\end{aligned} \tag{26}$$

Die Streurate ist eine Summe von zwei Prozessen: Der erste Term beschreibt eine Streuung zweier Teilchen mit Impulse $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{k}'$ die nach der Kollision die Impulse $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}$ und $\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}'$ haben. Der zweite Term beschreibt den inversen Prozess, d.h. zwei Teilchen mit Impulsen $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}$ und $\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}$ Kollidieren und haben nach der Streuung die Impulse $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{k}'$. Bei der Streuung haben wir natürlich Impuls- ($\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}$) und Energie-erhaltung ($\xi_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}'}=\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}+\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}$).

Lasst uns jetzt zeigen, dass die Lebensdauer $\tau_{\boldsymbol{k}}\to\infty$ bei $T=0$ und $\xi_{\boldsymbol{k}}\to 0$.

Wir notieren dafür erst, dass bei $T=0$ die Verteilungsfunktion $n_F(\xi)=\Theta(-\xi)$. Dies bedeutet, dass der erste Term in Gl. (26) nur einen Beitrag liefert wenn $\xi_{\boldsymbol{k}'}<0$, $\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}>0$ und $\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}>0$. Für den zweiten Term benötigen wir dagegen $\xi_{\boldsymbol{k}'}>0$, $\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}<0$ und $\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}<0$.

Setzen wir $\xi_{\boldsymbol{k}}=0$. Dann folgt aus der Energieerhaltung $\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}+\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}=\xi_{\boldsymbol{k}}+\xi_{\boldsymbol{k}'}$, dass

$$\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}=\xi_{\boldsymbol{k}'}-\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}} \tag{27}$$

Diese Gleichung ist nicht vereinbar mit den gegebenen Verteilungsfunktionen bei $T=0$ in den beiden Termen in Gl. (26).

Für den ersten Term haben wir $\xi_{\boldsymbol{k}'}<0$ und $\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}>0$. Die Energieerhaltung verlangt dann das $\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}<0$ aber der Faktor $(1-n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})$ verlangt bei $T=0$, dass $\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}>0$.

Für den zweiten Term haben wir $\xi_{\boldsymbol{k}'}>0$ und $\xi_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}<0$. Die Energieerhaltung verlangt dann das $\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}>0$ aber der Faktor $n_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}$ verlangt bei $T=0$, dass $\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}<0$.

Dies bedeutet, dass das rechte Glied von Gl. (26) bei $T=0$ und $\xi_{\boldsymbol{k}}=0$ null gibt, und deswegen $\tau_{\boldsymbol{k}}=\infty$